DYNAMIC SPATIAL GENERAL EQUILIBRIUM

BENNY K. ERNEST L. STEPHEN R.

黄靖翔 黄山 尹鸿昊 张子阳

Fudan University

June 5, 2023

1 引入

2 动态空间模型

3 谱分析

4 实证分析

5 结论

引入

- BENNY KLEINMAN
  - Department of Economics, Princeton University
  - 空间经济学、经济增长与波动、贸易与福利影响

- ERNEST LIU
  - Department of Economics, Princeton University
  - 生产网络理论、低利率对市场的影响、中国经济

- STEPHEN J. REDDING
  - Department of Economics and SPIA, Princeton University
  - 动态比较优势、企业异质性、城市集聚

- 核心问题
  研究经济活动的空间分布对外生冲击的反应。
- 主要挑战
  - 对前瞻性资本投资进行建模;
  - 每个地点的投资和移民决策都是相互决定、相互依赖;
  - 与所有地点和所有未来的投资和移民决策相关。

动态空间模型

- 假定一个经济体有 N 个区域，但是只有 1 个生产部门
- 两类时间无限期的经济参与主体
  - 工人 (Worker)
    - 在各期有一单位劳动，可以移动
    - 'Hand to Mouth' 不做投资储蓄决策
    - 进行是否移民决策以达到自身效用最大化
  - 资本家 (Landlord)
    - 在当地有资本，不可以移动
    - 不可对其他地区进行投资
    - 进行前瞻性投资决策以达到跨期效用最大化
- 内生变量：l_{it}、k_{it}
- 外生变量：$z_{it}, b_{it}, \tau_{nit}, \kappa_{nit}$

- 生产函数服从柯布-道格拉斯生产函数

$$y_{it} = z_{it}(\frac{l_{it}}{\mu})^{\mu}(\frac{k_{it}}{1-\mu})^{1-\mu}, 0 < \mu < 1 \tag{1}$$

- 价格水平：

$$p_{nit} = \tau_{nit} p_{iit} = \frac{\tau_{nit} w_{it}^{\mu} r_{it}^{1-\mu}}{z_{it}} \tag{2}$$

p_{iit} 的证明

证明：构造目标函数 $\pi = z_{it}(\frac{l_{it}}{\mu})^{\mu}(\frac{k_{it}}{1-\mu})^{1-\mu} - wl_{it} - rk_{it}$

$$F.O.C\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial l_{it}} = z_{it}\left(\dfrac{l_{it}}{\mu}\right)^{\mu-1}\left(\dfrac{k_{it}}{1-\mu}\right)^{1-\mu} - w = 0, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial k_{it}} = z_{it}\left(\dfrac{l_{it}}{\mu}\right)^{\mu}\left(\dfrac{k_{it}}{1-\mu}\right)^{-\mu} - r = 0. \end{cases} \tag{3}$$

有 $\frac{l_{it}}{k_{it}} = \frac{r}{w} \cdot \frac{\mu}{1-\mu}$，从而 $l_{it} = \frac{r}{w} \cdot \frac{\mu}{1-\mu} \cdot k_{it}$.
考虑到不存在固定成本且市场完全竞争，有

$$p_{iit} = \frac{C}{Y_{iit}} = \frac{wl_{it} + rk_{it}}{z_{it}(\frac{l_{it}}{\mu})^{\mu}(\frac{k_{it}}{1-\mu})^{1-\mu}}.$$

代入 l_{it} 的表达式，即得 $p_{iit} = \frac{w_{it}^{\mu} r_{it}^{1-\mu}}{z_{it}}$, $Q.E.D.$

- 工人的效用函数:

$$u_{nt}^{w} = b_{nt} c_{nt}^{w}$$

- 工人的消费函数 (CES):

$$c_{nt}^{w} = [\sum_{i=1}^{N} (c_{nit}^{w})^{\frac{\theta}{\theta+1}}]^{\frac{\theta+1}{\theta}}, \theta = \sigma - 1, \sigma > 1 \tag{4}$$

- 价格指数:

$$p_{nt} = \left[\sum_{i=1}^{N} p_{nit}^{-\theta}\right]^{-1/\theta} \tag{5}$$

$$u_{nt}^{w} = \frac{b_{nt} w_{nt}}{p_{nt}}$$

- 资本家的跨期效用:

$$v_{it}^{k} = \mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} \frac{\left(c_{it+s}^{k}\right)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi} \tag{6}$$

- 资本家跨期预算约束:

$$r_{it}k_{it} = p_{it}\left(c_{it}^{k} + k_{it+1} - (1-\delta)k_{it}\right) \tag{7}$$

引理 1

结合资本所有者的跨期效用以及预算约束，我们如下描述资本所有者的跨期最优化问题：

$$\max_{\{c_{its}^k, k_{it+s+1} 1_{s=0}^{\infty}\}} \mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} \frac{\left(c_{it+s}^k\right)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi},$$
$$s.t. p_{it} c_{it}^k + p_{it}\left(k_{it+1} - (1-\delta) k_{it}\right) = r_{it} k_{it}.$$

引理 1 指出，资本所有者最优化的储蓄与投资满足：

$$k_{it+1} = (1-\varsigma_{it}) R_{it} k_{it}$$

其中 R_{it} 代表资本回报的毛利率

$$R_{it} \equiv 1 - \delta + r_{it}/p_{it}$$

且

$$\varsigma_{it}^{-1} = 1 + \beta^{\psi} \left(\mathbb{E}_t \left[R_{it+1}^{\frac{\psi-1}{\psi}} \varsigma_{it+1}^{-\frac{1}{\psi}} \right] \right)^{\psi}.$$

引理 1：证明

为了求解这一最大化问题，首先构造贝尔曼函数如下：

$$v(k_t;t) = \max_{\{c_t,k_{t+1}\}} \frac{c_t^{1-1/\psi}}{1-1/\psi} + \beta\mathbb{E}_t v(k_{t+1};t+1)$$

$$\text{s.t.}\ \ c_t + k_{t+1} = R_t k_t,$$

我们假定价值函数形如

$$v(k_t;t) = \frac{(a_t R_t k_t)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi}$$

以下我们将尝试证明，存在 a_t, ς_t 使得 $v(k_t;t) = \frac{(a_t R_t k_t)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi}$，且第 t 期最优化的消费满足 $c_t = \varsigma_t R_t k_t$.

引理 1：证明

进一步构造拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}_t = \frac{c_t^{1-1/\psi}}{1-1/\psi} + \beta \mathbb{E}_t v\left(k_{t+1}; t+1\right) + \xi_t \left[R_t k_t - c_t - k_{t+1}\right]$$

$$F.O.C \begin{cases} c_t^{-1/\psi} = \xi_t, \\ \xi_t = \beta k_{t+1}^{-1/\psi} \mathbb{E}_t \left[a_{t+1}^{1-1/\psi} R_{t+1}^{1-1/\psi}\right]. \end{cases}$$

因此，

$$c_t = \beta^{-\psi} k_{t+1} \mathbb{E}_t \left[a_{t+1}^{1-1/\psi} R_{t+1}^{1-1/\psi}\right]^{-\psi}$$

根据包络条件 $v_k\left(k_t; t\right) = \xi_t R_t$ ，可以得到：

$$a_t^{1-1/\psi} R_t^{1-1/\psi} k_t^{-1/\psi} = c_t^{-1/\psi} R_t$$

引理 1：证明

将包络条件得到的结果代入我们的猜想 $c_t \equiv \varsigma_t R_t k_t$ ，我们得到：

$$a_t^{1-\varsigma_t} = s_t$$

将预算约束 $k_{t+1} = (1-\varsigma_t) R_t k_t$ 代入一阶条件的结果中得到：

$$\begin{aligned}\varsigma_t =& \beta^{-\psi} \mathbb{E}_t \left[a_{t+1}^{1-1/\psi} R_{t+1}^{1-1/\psi} \right]^{-\psi} (1-\varsigma_t) \\ \Longleftrightarrow \varsigma_t^{-1} =& 1 + \beta^{\psi} \mathbb{E}_t \left[R_{t+1}^{\frac{\psi-1}{\psi}} \varsigma_{t+1}^{-1/\psi} \right]^{\psi} .\end{aligned}$$

Q.E.D.

- 工人价值函数:

$$\mathbb{V}_{it}^{w} = \ln u_{it}^{w} + \max_{\{g\}_1^N} \left\{ \beta \mathbb{E}_t \left[\mathbb{V}_{gt+1}^{w} \right] - \kappa_{git} + \rho \varepsilon_{gt} \right\} \tag{8}$$

- ε 服从极值分布:

$$F(\varepsilon) = e^{-e^{(-\varepsilon-\bar{\gamma})}}$$

- 商品市场出清条件:

$$(w_{it}\ell_{it} + r_{it}k_{it}) = \sum_{n=1}^{N} S_{nit}\left(w_{nt}\ell_{nt} + r_{nt}k_{nt}\right) \tag{9}$$

- 资本市场出清条件:

$$r_{it}k_{it} = \frac{1-\mu}{\mu} w_{it}\ell_{it} \tag{10}$$

- 资本回报和资本积累：
  - 利用资本市场出清条件 (9) 可得

$$R_{it} = \left(1 - \delta + \frac{1-\mu}{\mu}\frac{w_{it}\ell_{it}}{p_{it}}\right)$$

  - 价格指数 (4) 可写为

$$p_{nt} = \left[\sum_{i=1}^{N}\left(w_{it}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{1-\mu}(\ell_{it}/k_{it})^{1-\mu}\tau_{ni}/z_i\right)^{-\theta}\right]^{-1/\theta} \tag{11}$$

  - 资本的增长路径为

$$k_{it+1} = (1-\varsigma_{it})\left(1 - \delta + \frac{1-\mu}{\mu}\frac{w_{it}\ell_{it}}{p_{it}k_{it}}\right)k_{it} \tag{12}$$

  - 其中 1-ς_{it} 已在引理一中证明

商品市场出清

$$w_{it}\ell_{it} = \sum_{n=1}^{N} S_{nit} w_{nt} \ell_{nt} \qquad S_{nit} = \frac{\left(w_{it}\left(\ell_{it}/k_{it}\right)^{1-\mu}\tau_{ni}/z_i\right)^{-\theta}}{\sum_{m=1}^{N}\left(w_{mt}\left(\ell_{mt}/k_{mt}\right)^{1-\mu}\tau_{nm}/z_m\right)^{-\theta}}, \qquad T_{int} \equiv \frac{S_{nit} w_{nt} \ell_{nt}}{w_{it}\ell_{it}} \tag{13}$$

工人的价值方程

$$v_{nt}^{w} = \ln b_{nt} + \ln\left(\frac{w_{nt}}{p_{nt}}\right) + \rho \ln \sum_{g=1}^{N}\left(\exp\left(\beta \mathbb{E}_t v_{gt+1}^{w}\right)/\kappa_{gnt}\right)^{1/\rho} \tag{14}$$

人口流动

$$\ell_{gt+1} = \sum_{i=1}^{N} D_{igt}\ell_{it} \qquad D_{igt} = \frac{\left(\exp\left(\beta \mathbb{E}_t v_{gt+1}^{w}\right)/\kappa_{git}\right)^{1/\rho}}{\sum_{m=1}^{N}\left(\exp\left(\beta \mathbb{E}_t v_{mt+1}^{w}\right)/\kappa_{mit}\right)^{1/\rho}}, \qquad E_{git} \equiv \frac{\ell_{it} D_{igt}}{\ell_{gt+1}} \tag{15}$$

命题 1：存在性与唯一性

- 一般均衡的存在性与唯一性

在给定与时间不相关的地区环境变量 $\{z_i*, b_i*, \tau_{ni}*, \kappa_{ni}*\}$ 时，经济活动唯一稳态空间分布 $\{l_i*, k_i*, w_i*, R_i*, v_i*\}$ 存在的充分条件是，模型参数的系数矩阵 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 的谱半径小于或等于 1.

- 对于给定的观测到的经济初始分配，
$(\{l_{i0}\}_{i=1}^{N}, \{k_{i0}\}_{i=1}^{N}, \{k_{i1}\}_{i=1}^{N}, \{S_{ni0}\}_{i=1}^{N}, \{D_{ni,-1}\}_{i=1}^{N})$

  以及未来环境变量变化的完美预期，
$$\left\{ \{\dot{z}_{it}\}_{i=1}^{N}, \left\{\dot{b}_{it}\right\}_{i=1}^{N}, \{\dot{\tau}_{ijt}\}_{i,j=1}^{N}, \{\dot{\kappa}_{ijt}\}_{i,j=1}^{N} \right\}_{t=1}^{\infty}$$

  模型内生变量变化序列的求解不需要环境变量的信息：
$$\left\{ \{z_{it}\}_{i=1}^{N}, \{b_{it}\}_{i=1}^{N}, \{\tau_{ijt}\}_{i,j=1}^{N}, \{\kappa_{ijt}\}_{i,j=1}^{N} \right\}_{t=0}^{\infty}。$$

谱分析

- 解一般均衡方程组可以得到如下转移路径方程组

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_t = \boldsymbol{S}\left(\tilde{\boldsymbol{w}}_t - \tilde{\boldsymbol{z}}_t - (1-\mu)\left(\tilde{\boldsymbol{k}}_t - \tilde{\boldsymbol{\ell}}_t\right)\right), \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{k}}_{t+1} &= \tilde{\boldsymbol{k}}_t + (1-\beta(1-\delta))\left(\widetilde{\boldsymbol{w}}_t - \widetilde{\boldsymbol{p}}_t - \tilde{\boldsymbol{k}}_t + \tilde{\boldsymbol{\ell}}_t\right)\\ &+(1-\beta(1-\delta))\frac{1-\beta}{\beta}(\psi-1)\times\mathbb{E}_t\sum_{s=1}^{\infty}\beta^s\left(\widetilde{\boldsymbol{w}}_{t+s} - \tilde{\boldsymbol{p}}_{t+s} - \tilde{\boldsymbol{k}}_{t+s} + \tilde{\boldsymbol{\ell}}_{t+s}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

$$[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T} + \theta(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{TS})]\widetilde{\boldsymbol{w}}_t = \left[-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})\tilde{\boldsymbol{\ell}}_t + \theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TS})\left(\tilde{z}_t + (1-\mu)\left(\tilde{\boldsymbol{k}}_t - \tilde{\boldsymbol{\ell}}_t\right)\right)\right], \tag{18}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\ell}}_{t+1} = \boldsymbol{E}\tilde{\boldsymbol{\ell}}_t + \frac{\beta}{\rho}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{ED})\mathbb{E}_t\tilde{\boldsymbol{v}}_{t+1}, \tag{19}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_t = \widetilde{\boldsymbol{w}}_t - \widetilde{\boldsymbol{p}}_t + \tilde{\boldsymbol{b}}_t + \beta\boldsymbol{D}\mathbb{E}_t\tilde{\boldsymbol{v}}_{t+1}, \tag{20}$$

- 模型的动态转移可以简化为如下的线性二阶差分方程

$$\Psi\tilde{\mathbf{x}}_{t+2} = \Gamma\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} + \Theta\tilde{\mathbf{x}}_t + \Pi\tilde{\boldsymbol{f}}, \tag{21}$$

  - 其中，$\tilde{\mathbf{x}}_t = (\tilde{\boldsymbol{l}}_t, \tilde{\boldsymbol{k}}_t)'$ 为状态变量矩阵，$\tilde{\boldsymbol{f}} = (\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{b}})'$ 为外生冲击影响生产力和便利设施的矩阵；
  - 其中，$(\Psi, \Gamma, \Theta, \Pi)$ 仅与模型参数 $(\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta)$ 和贸易移民矩阵 $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E})$ 有关。

命题 3：转移路径

- 假定经济体在 $t=0$ 时处于收敛路径上，向给定环境变量 (z, b, κ, τ) 的稳态收敛。在 $t=0$ 时，经济体受到一个对生产力 (z) 和生活便利设施 (b) 的一次性、永久性的冲击。存在一个 $2N \times 2N$ 的转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和一个 $2N \times 2N$ 的冲击矩阵 $\boldsymbol{R}$，使得上述线性二阶差分方程有如下的解析解：

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{t+1} = \boldsymbol{P}\widetilde{\mathbf{x}}_t + \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{f}} \quad \text{for } t \geq 0. \tag{22}$$

  - 转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{-1}$，其中 Λ 是由 $2N$ 个特征值排列的对角矩阵，$\boldsymbol{U}$ 是由对应的 $2N$ 个特征向量排列得到的矩阵。
  - 冲击矩阵 $\boldsymbol{R}$ 由 $\boldsymbol{R} = (\Psi\boldsymbol{P} + \Psi - \Gamma)^{-1}\Pi$, 给定，其中 $(\Psi, \Gamma, \Theta, \Pi)$ 是二阶差分方程 (20) 中的系数矩阵。

$$\ln \boldsymbol{x}_t - \ln \boldsymbol{x}_{-1} = \sum_{s=0}^{t} \boldsymbol{P}^s \left(\ln \boldsymbol{x}_0 - \ln \boldsymbol{x}_{-1}\right) + \sum_{s=0}^{t-1} \boldsymbol{P}^s \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}}, \tag{23}$$

$$\ln x^*_{\text{initial}} = \lim_{t\to\infty} \ln x_t = \ln x_{-1} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} \left(\ln x_0 - \ln x_{-1}\right), \tag{24}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_t = \ln \boldsymbol{x}_t - \ln \boldsymbol{x}_0 = \sum_{s=0}^{t-1} \boldsymbol{P}^s \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{f}} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^t\right) (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{f}}. \tag{25}$$

新稳态的存在性

设 $\mathbf{A}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，其特征值为 λ_i，特征向量为 $\mathbf{v}_i$。

根据约当矩阵定理，对任意一个 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$，都存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$

因此我们将 $\mathbf{A}$ 进行约当标准形分解，得到 $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$，其中 $\mathbf{J}$ 是由约当块组成的矩阵，$\mathbf{P}$ 是由特征向量组成的矩阵。

所以对于矩阵 $\mathbf{A}^k$，我们有：

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{PJP}^{-1})^k = \mathbf{PJP}^{-1}\mathbf{PJP}^{-1} \cdots \mathbf{PJP}^{-1} = \mathbf{PJ}^k\mathbf{P}^{-1}$$

约当矩阵的一般形式为：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{bmatrix}$$

因此，约当矩阵的 k 次幂 $\mathbf{J}^k$ 形如

$$\mathbf{J}^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n^k \end{bmatrix}$$

而对于每个 $m \times m$ 的约当块，其形式为：

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

因为我们关心的是 $\lim k \to \infty$ 的情况，所以 $\mathbf{J}_i^k$ 的通式为：

$$\mathbf{J}_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & C_k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & C_k^{m-1}\lambda_i^{k-m+1} \\ 0 & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m-2}\lambda_i^{k-m+2} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k & \cdots & C_k^{m-3}\lambda_i^{k-m+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

为了满足 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$，意味着 $\mathbf{J}^k$ 是零矩阵，这要求每个 $\mathbf{J}_i^k$ 都是零矩阵。

我们发现，对角矩阵上的特征值 λ_i 次数最高。只要 λ_i^k 收敛，则上述条件都满足。显然，λ_i^k 收敛的条件是所有约当块的特征值的绝对值都小于 1，这能使得 $\mathbf{A}^k$ 的每个元素趋近于零。

综上所述，矩阵 $\mathbf{A}$ 收敛的条件是其所有约当块的特征值的绝对值都小于 1。

- 对转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 进行特征分解，由特征值和特征向量的定义有：

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{-1}, \quad \lambda_h \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_h, \quad \lambda_h \boldsymbol{v}_h' = \boldsymbol{v}_h'\boldsymbol{P}.$$

- 特征冲击
  - 实证冲击可以分解为多个特征冲击进行刻画。
  - 对于转移矩阵的每一个特征值，均有特征冲击与之对应。
  - 特别地，当特征值 $=1$ 时，我们称呼对应的特征冲击为“平凡的 (trivial)”冲击。
  - 我们用 $\tilde{f}$ 表示实证冲击，$\tilde{f}_{(h)}$ 表示特征冲击。对两者进行回归可以得到相关系数，并在后续加以运用。

- 假定经济体在 $t=0$ 时处于稳态。在 $t=0$ 时，经济体受到一个对生产力 (z) 和生活便利设施 (b) 的一次性、永久性的外生冲击。状态变量的转移路径可以写为转移矩阵的特征值和特征向量的线性组合：

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_t = \sum_{s=0}^{t-1} \boldsymbol{P}^s \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}} = \sum_{h=1}^{2N} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{v}_h' \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}} = \sum_{h=2}^{2N} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \boldsymbol{u}_h a_h, \tag{26}$$

  - 其中，线性组合的权重 a_h 为实证冲击（即观察到的冲击）$\tilde{\boldsymbol{f}}$ 和特征冲击 $\tilde{\boldsymbol{f}}_{(h)}$ 进行回归得到的回归系数。

命题 5：收敛速度

- 假定经济体在 $t=0$ 时处于稳态。在 $t=0$ 时，经济体受到一个对生产力 (z) 和生活便利设施 (b) 的一次性、永久性的外生冲击。假定外生冲击是非平凡的 (nontrivial)，这意味着在 $t=1$ 期，用向量刻画该冲击对状态变量的影响与转移矩阵的特征向量是相同的，即 $\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}}_{(h)}=\boldsymbol{u}_h$。此时状态变量的动态转移为：

$$\tilde{\mathbf{x}}_t=\sum_{j=2}^{2N}\frac{1-\lambda_j^t}{1-\lambda_j}\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j'\boldsymbol{u}_h=\frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h}\boldsymbol{u}_h \quad\Longrightarrow\quad \ln\mathbf{x}_{t+1}-\ln\mathbf{x}_t=\lambda_h^t\boldsymbol{u}_h,$$

- 收敛到稳态的半衰期为

$$t_h^{(1/2)}(\tilde{\boldsymbol{f}})=-\left\lceil\frac{\ln 2}{\ln\lambda_h}\right\rceil,$$

  - 其中，0 特征值对应的半衰期为 0，$\lceil\rceil$ 为取整函数。

- 我们假定两个地区是对称的，这意味着支出（收入）矩阵和迁入（迁出）矩阵是对称且对角占优的。
- 我们假定经济体在 $t = 0$ 时，受到一个对生产力 (z) 和生活便利设施 (b) 的一次性、永久性的外生冲击.
- 接下来我们将通过三步对该两地点案例进行谱分析。

- 第一步，我们将状态变量变化定义为对数形式，即 $\tilde{\mathbf{x}}_t \equiv \begin{bmatrix} \frac{\ln l_t - \ln l^*}{\ln k_t - \ln k^*} \end{bmatrix}$，运用命题 3，我们可以得到状态变量的动态转移差分方程的闭合解：

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{t+1} = \boldsymbol{P}\widetilde{\mathbf{x}}_t + \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}} \quad \text{for } t \geq 0, \text{ with } \widetilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}. \tag{27}$$

- 因此，外生冲击的初始效果由冲击矩阵决定：

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}}$$

- 下一期的状态变量由转移矩阵决定：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} - \tilde{\mathbf{x}}_t = \boldsymbol{P}^t\widetilde{\mathbf{x}}_1 \quad \text{for all } t \geq 0.$$

- 由于每个地区有两个状态变量，因此冲击矩阵和转移矩阵均是 4×4 的。

- 第二步，运用命题 4，我们将动态转移过程用转移矩阵的特征值和特征向量表示：

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \sum_{h=1}^{4} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{v}_h' \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{f}} \tag{28}$$

  - 其中，$\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h', \lambda_h^t$ 分别是第 h 个右特征向量，左特征向量和转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的特征值。
- 该式表明，状态变量的动态转移过程可以用外生冲击的初始影响 $\tilde{x}_1 = R\tilde{f}$ 和转移矩阵的特征分解来表示。

- 第三步，运用命题 5，我们将实证冲击对状态变量的影响 $R\widetilde{f}$ 表示为特征冲击的线性组合。
- 首先，我们定义了不平凡的特征冲击（即 $\tilde{f}_{(h)}$）作为对环境变量影响的冲击，该冲击对状态变量的初始影响 $R\widetilde{f}_{(h)}$ 可以由转移矩阵的右特征向量 $\boldsymbol{u}_h$ 表示。对于这样一个不平凡的特征冲击，对状态变量的动态影响可以仅用第 h 个特征值和特征向量刻画：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} - \tilde{\mathbf{x}}_t|_{\tilde{f}=\tilde{f}_{(h)}} = \lambda_h^t \boldsymbol{u}_h, \quad \tilde{\mathbf{x}}_t|_{\tilde{f}=\tilde{f}_{(h)}} = \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h}\boldsymbol{u}_h, \tag{29}$$

  - 其中，收敛到新的稳态的速度仅由对应的特征值 λ_h 决定。该特征值越大，收敛的速度越慢。
- 其次，我们通过对实证冲击 $\tilde{f}$ 和特征冲击 $\tilde{f}_{(h)}$ 的回归，结合特征分解，刻画实证冲击对状态变量的影响。

- 通常情况下，转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的特征值和特征向量不仅由模型参数 $(\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta)$ 决定，还由贸易和移民矩阵 $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E})$ 决定。在这个两地点案例中，由于假定的特殊性，四个特征向量有着如下的简单形式：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \zeta \\ -\zeta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\xi \\ \xi \end{bmatrix}, \tag{30}$$

  - 其中，ζ, ξ 仅由模型参数和贸易与移民矩阵决定。

- 这些特征向量分别有着对应的经济学直觉。
  - 第一个特征向量 $\boldsymbol{u}_1 = [1, 1, 0, 0]'$ 对应的特征值为 0，相应的特征冲击为 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2]' = [0, 0, 1, 1]'$。对两个地区施加了相同的便利设施冲击，没有改变人口份额和资本存量，立刻收敛至稳态。
  - 第二个特征向量 $\boldsymbol{u}_1 = [0, 0, 1, 1]'$ 对应的特征冲击为 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2]' = [1, 1, 0, 0]'$。没有对便利设施施加冲击，所以人口份额没有改变；相同的生产力冲击会相同地改变的消费者价格指数。
    - 当资本家有着相同的跨期替代弹性时，该特征向量的特征值为 $[1 - (1 - \beta(1 - \delta))\mu]$。

- 剩余的两个特征向量刻画了在两地间非对称的冲击。
- 第三个特征向量 $\boldsymbol{u}_3 = [1, -1, \zeta, -\zeta]'$ 对应的特征冲击为 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2]' = [1, -1, c, -c]'$，第四个特征向量 $\boldsymbol{u}_3 = [1, -1, -\xi, \xi]'$ 对应的特征冲击为 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2]' = [1, -1, -d, d]'$，其中 c, d 均是常数。

- 第三个特征冲击就表示两地之间生产力和便利设施冲击的正相关的，即对两地的生产力和便利设施分别施加正影响 $(1, c)$ 和负影响 $(-1, -c)$ 的影响。
  - 在这种情况下，施加正影响的地区在稳态时劳动和资本都高于初始情况，施加负影响的地区在稳态时劳动和资本都低于初始情况。
  - 经济体面对冲击的初始反应是劳动和资本都向新的稳态移动，由特征向量 $\boldsymbol{u}_3$ 刻画。
- 第四个特征冲击表示两地之间生产力和便利设施冲击的负相关的，即分别施加 $(1, -d)$ 和 $(-1, d)$ 的影响。
  - 在这种情况下，一地的新稳态具有更高的人口份额和更低的资本存量，另一地的新稳态有更低的人口份额和更高的资本存量。

- 在我们的数值模拟中，我们发现第三个特征向量的特征值是大于第四个特征向量的。
- 因此，如果对生产力和便利设施的冲击是正相关的，经济体向稳态收敛的速度会更慢
  - 原因在于不同生产技术下的资本和劳动的边际产出不同。
  - 当资本和劳动都高于稳态时，更高的资本存量提高了劳动的边际产出，延缓了劳动下调的速度；相对地，更高的劳动供给提高了资本的边际产出，也延缓了资本下调的速度。
  - 当资本和劳动都低于稳态时，资本（劳动）的边际产出的下降延缓了劳动（资本）上调的速度。

- 通过这四种类型的冲击的线性组合，我们可以表示两个对称地区之间的任何冲击，分别为：
  - 对两地的便利设施施加相同的冲击；
  - 对两地的生产力施加相同的冲击；
  - 对一地的便利设施和生产力施加正相关的冲击 $(1, c)$，对另一地施加其反作用 $(-1, -c)$；
  - 对一地的便利设施和生产力施加负相关的冲击 $(1, -d)$，对另一地施加其反作用 $(-1, d)$。
- 我们在附录里证明，非对称地区情况下的分析和对称情况的分析是类似的。

实证分析

- 数据来源
  - 人口、生产总值和资本存量来自美国经济分析局（BEA，1965-2015）；
  - 移民数据来自美国人口普查（1960-2000-）和美国社区调查（ACS，2000-）；
  - 贸易数据来自商品流量调查（CFS，1993-2017）和商品运输调查（CTS，-1997）
- 参数设定（五年一期）
  - 贸易弹性 $\theta = 5$;
  - 折现率 $\beta = (0.95)^5$;
  - 跨期替代弹性 $\psi = 1$;
  - 移民弹性 $\rho = 3\beta$;
  - 劳动在生产函数权重 $\mu = 0.65$;
  - 折旧率 $\delta = 1 - (0.95)^5$.

- 关于地区划分，我们将美国划分为四个区域，分别为铁锈带、阳光带、其他南方州和其他北方州。

- 在 1963-1980 年间存在明显的收入收敛，在 1980-2000 年间这种收敛有所弱化，在 2000-2017 年间存在明显的收入差异。
- 我们称这种现象为人均收入收敛的速度随时间而下降。

Figure: 1: 人均收入增长和初始水平的关系。纵轴表示人均收入的年增长率，横轴表示初始人均收入的对数水平，圆圈对应各州，半径对应各州的就业水平，红线为拟合线。

- 相比外生冲击，初始条件更多地解释了收入收敛。
  - 描述性分析：相关系数检验——5.3.1
  - 谱分析：收敛速度（载荷分析）——5.4.1
  - 谱分析：初始条件与收敛——5.4.2（略）
  - 谱分析：外生冲击与收敛——5.4.3（略）
- 资本与劳动的相互作用共同决定了收敛的过程。
  - 描述性分析：相关系数检验——5.3.2
  - 谱分析：收敛速度（图形特点）——5.4.1
- 收敛的动态过程
  - 谱分析：脉冲响应——5.4.4
  - 谱分析：收敛速度的比较静态分析——5.4.5

Figure: 2a: 初始条件和收入收敛的关系。呈现的是每 10 年的人均收入增长速率和初始年份的人均收入对数水平的相关系数。红色实线表示反事实的人均收入，黑色虚线表示真实数据的人均收入。

- **实证数据中收入收敛速度下降的现象，大部分可以用初始条件解释。**

Figure: 2b: 初始条件和收入收敛的相关系数，同样呈现的是每 10 年的人均增长速率和初始年份人均收入对数水平的相关系数。红色实线表示反事实人均收入，黑色虚线表示不存在资本积累时的反事实人均收入，黑色点虚线表示不存在移民的反事实人均收入。

- 资本积累和移民对收入收敛速度下降都有实质性贡献；
- 其中，资本对人均收入收敛的影响更显著。

Figure: 3:1975 年转移矩阵的特征分量谱分析。

- 将实证冲击转化为 98 个特征冲击，并按照半衰期顺序排列。图中，黑色圆点实线为半衰期；
- 红色虚线为第一个常值特征冲击，即平凡特征冲击；
- 蓝色实线对应第二个常值特征冲击，即特征值可以表示为 $[1-(1-\beta(1-\delta))\mu]$ 的特征冲击，对应的半衰期为蓝色虚线；
- 紫色实线为 1975 初始条件偏离稳态对状态变量改变的载荷；
- 绿色实现为 1975-2015 冲击对状态变量改变的载荷。

4.4.1 收敛速度（续：图形特点）

- 收敛到稳态的速度都很慢，平均半衰期为 20 年左右；
- 不同特征冲击的收敛速度有明显的异质性，半衰期从 0（平凡特征冲击）到 80 年不止；
- 劳动和资本偏离稳态的差值越相关，半衰期越大，收敛到稳态的速度越慢。劳动和资本之间的相互作用共同塑造了收敛速度，和前文的边际产出理论相对应。

4.4.1 收敛速度（续：载荷分析）

- 载荷：初始条件和外生冲击对收敛速度的贡献。
- 半衰期较长的特征冲击，初始条件带来的载荷比外生冲击的载荷大；对于半衰期较短的特征冲击，外生冲击带来的载荷比初始条件的载荷大。
- 我们又证实了结论：初始条件对稳态的解释力比外生冲击大。

Figure: 4:1975 年初始条件偏离稳态的分解。纵轴为资本偏离稳态的对数，横轴为劳动偏离稳态的对数。左图表现了不同州偏离稳态的分布。中图展现了收敛到稳态最慢的 10 个特征分量对应的偏离稳态的分布。右图展现了其他 88 个较快收敛的特征分量对应的偏离稳态分布。三张图的纵轴比例会有些许变化，但横轴比例不变。

4.4.2 谱分析：初始条件与收敛（续）

- 美国各州的资本和劳动力初始条件偏离稳态是正相关的，即上文的缓慢收敛情形。对于人口，铁锈带人口高于稳态，阳光带人口低于稳态。对于资本，所有州的资本都低于稳态。
- 资本和劳动力初始偏离稳态的正相关很大部分取决于收敛的最慢的 10 个特征分量，因为其正相关性更强。铁锈带和阳光带的差异很大，原因还来自于地理隔离。
- 基于初始条件，偏离稳态的收敛速度较慢决定于：偏离更多地由收敛的慢的特征分量决定；存在明显的地理隔离。

Figure: 5:1975-2015 年外生冲击的分解。纵轴为便利设施冲击，横轴为生产力冲击。左图表现了不同州外生冲击的分布。中图展现了收敛到稳态最慢的 10 个特征分量对应的外生冲击的分布。右图展现了其他 88 个较快收敛的特征分量对应的外生冲击分布。三张图的纵轴比例会有些许变化，但横轴比例不变。

4.4.3 谱分析：外生冲击与收敛（续）

- 美国各州的便利设施冲击和生产力冲击是负相关的，即上文的快速收敛情形。
- 便利设施冲击和生产力冲击的正相关部分取决于收敛的最慢的 10 个特征分量，但是横轴分布很窄，因此不具有较大的解释力。剩下 88 个收敛快的特征分量对冲击的负相关具有较强的解释力，并且不具有明显的地域区分。
- 相对于初始条件，外生冲击对解释收入趋同下降的贡献较小，这是因为外生冲击的影响主要由更快收敛的特征分量主导。

Figure: 6a: 密歇根州受到 15% 的生产力负面冲击的脉冲响应。左图展现了密歇根州人口份额偏离稳态的动态过程。右图中，蓝色实线展现了密歇根州的邻州的人口份额偏离稳态的动态过程，灰色实线表明了其他较远的州的人口份额的动态过程。

4.4.4 脉冲响应：快速收敛

Figure: 6b: 密歇根州受到 15% 的生产力负面冲击的脉冲响应。展现了由 1-88 个快速收敛的特征分量带来的偏离稳态的动态过程，其他条件和 6a 相同。

4.4.4 脉冲响应：慢速收敛

Figure: 6c: 密歇根州受到 15% 的生产力负面冲击的脉冲响应。展现了由 88-98 个慢速收敛的特征分量带来的偏离稳态的动态过程，其他条件和 6a 相同。

4.4.4 脉冲响应：结论

- 最初，密歇根州生产力的下降提高了邻州的人口份额，因为工人在迁入邻州时移民成本较低。随着经济向稳态调整，邻州的人口份额开始下降，甚至低于稳态。
- 从直觉来看，工人会向往离密歇根州更远的州，并且密歇根州生产力的下降会导致邻州生产规模降低，吸引力降低。
- 快速收敛的特征分量会推动邻州的人口份额上升，慢速收敛的特征分量会推动邻州的人口份额减少。

4.4.5 收敛速度的比较静态分析

- 更低的跨期替代弹性降低收敛速度，因为资本家的投资意愿下降；
- 更高的迁移弹性降低收敛速度，因为资本和劳动之间的相互作用更模糊；
- 更高的时间折现率降低收敛速度，因为资本家的储蓄意愿提升；

4.4.5 收敛速度的比较静态分析（续）

- 更低的劳动占产出比例降低收敛速度，因为生产力的冲击要花更久调整；
- 更高的贸易弹性降低收敛速度，因为这会导致劳动和资本在不同地区再分配，花费更多时间；
- 更低的贸易品占总产品数量降低收敛速度，因为冲击会更多地施加于当地，花费更多时间调整。

结论

- 我们构建了一个易于处理的框架，将前瞻性投资纳入了一个动态离散选择迁移模型，该模型克服了高维状态空间这一挑战；
- 我们通过构建差分方程得到冲击矩阵和转移矩阵，并得到经济转型路径的闭合解；
- 我们引入特征冲击的概念，并且用转移矩阵的谱属性（即特征值和特征向量）来表示经济体面对外生冲击时的动态反应；

5.1 结论（续）

- 我们使用谱分析，结合边际产出理论，强调了资本和劳动的相互作用会影响收敛的动态过程，并且这在理解美国各州观察到的收入趋同的下降现象，以及地方性冲击的持续性和异质性冲击现象由着重要的作用；
- 我们使用谱分析，通过初始条件和外生冲击对两种收敛速度不同的特征向量的作用不同，表明了初始条件解释了大部分观测到的收敛趋势；
- 综上所述，我们的研究突出了资本积累和移民动态过程之间的相互作用，以及谱分析对于研究多因素动态变化问题的重要性。

- 将前瞻性投资纳入了一个动态离散选择迁移模型，克服了高维状态空间这一挑战；将现有的动态精准帽代数技术推广到了合并投资。
- 将模型线性化，以得到初始冲击的冲击矩阵和用来控制状态变量变化的转移矩阵，并最终得到了经济转型路径的闭合解。
- 经济体面对外生冲击时的动态反应，是可以用转移矩阵的谱属性（即特征值和特征向量）来表示的。

5.3 本文创新

- 较 Blanchard and Kahn (1980) and Uhlig (1999) 所介绍的 DSGE 模型，本文考虑了更高维的空间，并运用特征值以描述地区间生产力与便利设施的冲击路径。
- 将 Barro and Sala-i-Martin (1992), Kim (1995), Mitchener and McLean (1999), and Ganong and Shoag(2017) 关于封闭经济增长模型框架进行扩展，引入双边人口流动与货物贸易这两个重要因素以解释美国地区收入趋同路径。
- 运用动态空间模型，为 Blanchard and Katz (1992), Autor,Dorn, and Hanson (2013, 2023), and Dix-Carneiro and Kovak (2017) 的关于永久性劳动供给冲击的实证研究提供了理论基础：工人遭受外部冲击而迁出与资本存量的减少会互相促进，造成严重的经济衰退。

Thanks!