

第一讲 经济学和数学的浪漫史

樊潇彦

复旦大学经济学院

本讲主要内容

1. 经济学和数学的浪漫史

1.1 数学的精神

1.2 经济学的智慧

1.3 当数学遇到经济学

1.4 现代经济学的数学化

2. 数学的能与不能

2.1 数学有大用

2.2 数学有边界

3. 关于本课

数学之美

数学是上帝用来书写宇宙的文字。

—— 伽利略

纯数学使我们能够发现概念和联系这些概念的规律，这些概念和规律给了我们理解自然现象的钥匙。

—— 爱因斯坦

一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。

—— 马克思

数学的精神

- ▶ **数学是一种精神，一种理性的精神。**
- ▶ 要用数学精神指导我们的科技和社会活动，不仅需要掌握具体的数学知识和数学方法，更重要的是要提高自己的数学素养。包括：
 - ▶ **定量描述**所关心的现象和问题；
 - ▶ **简化问题**，建立数学模型的能力；
 - ▶ **逻辑推理**、思考求证的意识和能力；
 - ▶ **准确表达**、简洁有力地阐述观点的能力。

什么是经济学？

▶ 什么是经济学？

经济学是一门研究稀缺资源如何进行配置的科学。

▶ 林毅夫：

现代经济学在表象上是经由烦琐的数学模型、严谨的逻辑推论而构筑的一套理论体系，并以此区别于其他社会科学。经济学对学习者真正有用的，是在这些错综复杂的理论背后，所反映出的一套观察个人行为及社会现象的思维方式。

▶ 保罗·海恩《经济学的思维方式》：经济学是一套方法，而不是一套结论。

- ▶ 假定：所有社会现象均源于个体的行为（actions）和互动（interactions），在这些活动中人们基于期望的额外收益和成本进行选择。
- ▶ 过程：优化（economizing）和权衡（trade-offs）。
- ▶ 结果：定性（qualitative）/定量（quantitative），规范（normative）/实证（positive）。

经济学的智慧

▶ 亚当·斯密 (1776): 《国民财富的性质和原因的研究》

每个人都试图用应用他的资本, 来使其生产品得到最大的价值。一般来说, 他并不企图增进公共福利, 也不清楚增进的公共福利有多少, 他所追求的仅仅是他个人的安乐, 个人的利益, 但当他这样做的时候, 就会有一双看不见的手引导他去达到另一个目标, 而这个目标绝不是他所追求的东西。由于追逐他个人的利益, 他经常促进了社会利益, 其效果比他真正想促进社会效益时所得到的效果为大。

▶ 司马迁 (145 BC ~ 90 BC) 《史记·货殖列传》

- ▶ 天下熙熙, 皆为利来; 天下壤壤, 皆为利往。
- ▶ 故待农而食之, 虞而出之, 工而成之, 商而通之。此宁有政教发征期会哉? 人各任其能, 竭其力, 以得所欲。故物贱之征贵, 贵之征贱, 各劝其业, 乐其事, 若水之趋下, 日夜无休时, 不召而自来, 不求而民出之。岂非道之所符, 而自然之验邪?

丝绸之路



Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Silk_Road

经济学十大原理：人们如何做出决策

1. 人是**自利的和理性的** (self-interested and rational) ，会对激励和损失做出反应：趋利避害、适者生存。
2. 相对于人类的需求，资源是稀缺的，因此人们总是面临**权衡取舍** (trade-off) ：天下没有免费的午餐，有舍才有得，经济学是选择的科学。
3. 某种东西的**机会成本** (opportunity cost) 是为了得到它所放弃的东西：鱼和熊掌不可兼得，熊掌是鱼的机会成本，鱼是熊掌的机会成本。
4. 理性人考虑**边际收益和成本** (marginal benefit/cost) ：边际收益等于边际成本时达到最优。

经济学十大原理：人们如何相互交易

5. 贸易能使每个人状况更好：

比较优势原理

6. 市场通常是组织经济活动的一种好方法：

看不见的手

7. 政府有时可以改善市场结果：

看得见的手

经济学十大原理：整体经济如何运行

8. 一国的生活水平取决于它生产物品与劳务的能力：
长期供给决定一切
9. 当政府发行了过多货币时，物价上升：
长期价格是货币现象，货币中性
10. 社会面临通货膨胀与失业之间的短期权衡取舍：
短期需求政策有效

数学是自然科学的国王
经济学是社会科学的王后
当数学遇到经济学.....

爱上“野兽”，获得幸福



经济数学发展简史

- ▶ **古典：**在亚当·斯密和马克思的著作中，数学的运用仅限于简单的举例和会计核算。
- ▶ **近代：**19世纪70年代的边际学派推动了经济学的数学化
 - ▶ 杰文斯（1871）《政治经济学理论》：利用导数表述边际效用概念，在方法论上提出“经济学是快乐与痛苦的微积分”。
 - ▶ 瓦尔拉斯（1874）《纯粹经济学要义》：以边际效用价值论为基础，创建了一般均衡论的理论体系。
- ▶ **现代：**20世纪50年代以来经济学迅速、全面地数学化。
 - ▶ 20世纪50年代肯尼斯·约瑟夫·阿罗和杰拉德·德布鲁等经济学家建立了一般均衡的公理化体系。
 - ▶ 萨缪尔森（1947）认为仅仅阅读十九世纪的经济著作，或者由教书匠和空谈家炮制的其现代改写本，是不能使人超越经济科学的幼儿园的，他的著作《经济分析原理》运用数学工具全面提升了现代经济学的分析水平。

大师



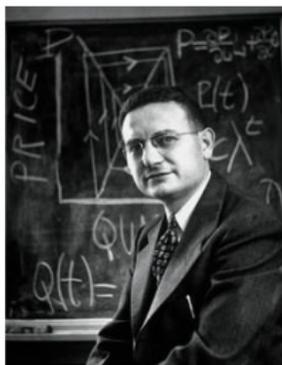
Léon Walras



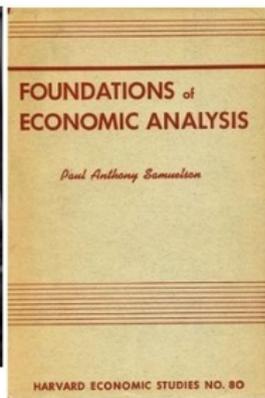
Kenneth Joseph Arrow



Gérard Debreu



Paul Samuelson



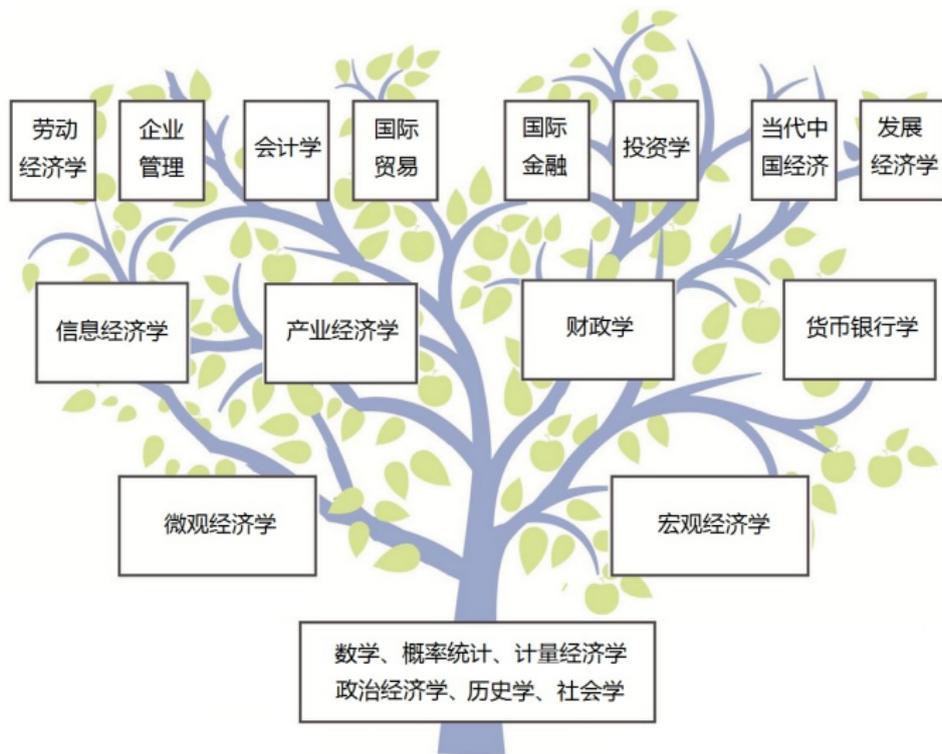
大师：用数学打通经济学的任督二脉



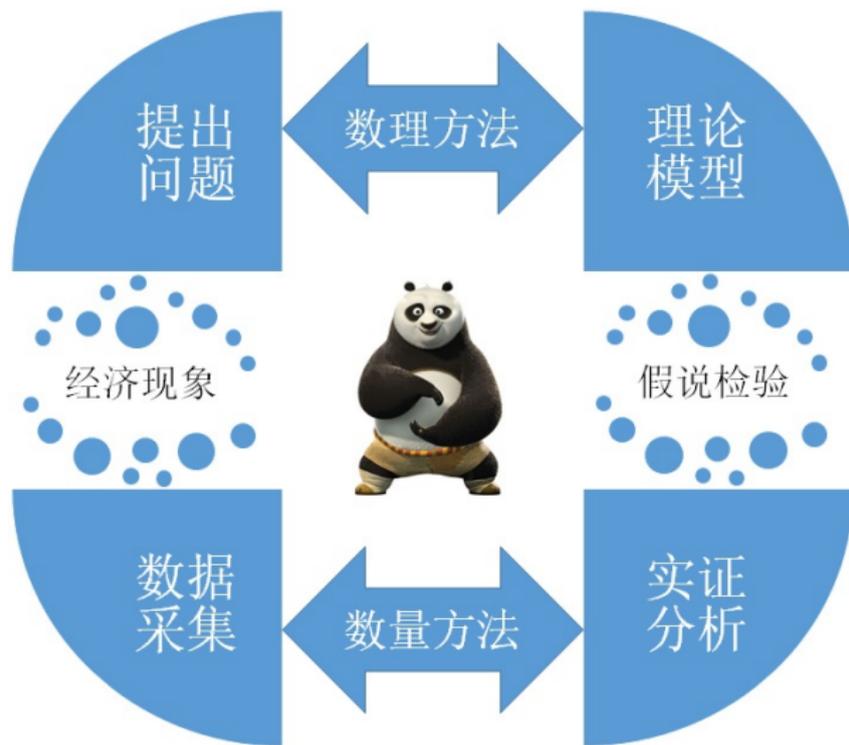
MAJORING IN ECONOMICS



FAMILY TREE OF ECONOMICS



经济学的任务：分析数据、解释现象



经济学的数学工具箱

- ▶ **逻辑：**
事件分类、关系描述、逻辑推演
- ▶ **数理(Mathematical method)：**
 - ▶ 初等数学（代数、几何）
 - ▶ 高等数学（微积分、线性代数）
- ▶ **数量(Quantitative method)：**
 - ▶ 概率、统计、计量
 - ▶ 数值模拟与计算
- ▶

例1：比较优势原理

在商业完全自由的制度下，各国都必然把它的资本和劳动用在最有利于本国的用途上。这种个体利益的追求很好地和整体的普遍幸福结合在一起。由于鼓励勤勉、奖励智巧、并最有效地利用自然所赋与的各种特殊力量，它使**劳动得到最有效和最经济的分配**；同时，由于增加生产总额，它使人们都得到好处，并以利害关系和相互交往的共同纽带把文明世界各民族结合成一个统一的社会。正是**比较优势原理**，决定葡萄酒应该在法国和葡萄牙酿制，谷物应在美国和波兰种植，金属制品及其他商品则应在英国制造。

—— 大卫·李嘉图 (1817): 《政治经济学及赋税原理》

例1：比较优势原理

给定两个国家的劳动者生产1单位两种商品的劳动时间（单位小时）

a_i^c , $c \in \{E, P\}$, $i \in \{c, w\}$, 以及两个国家的总劳动时间：

	布 (cloth)	酒 (wine)	总劳动时间
英国 (England)	100	120	220
葡萄牙 (Portugal)	100	80	180

不难发现：

- ▶ **绝对优势**：葡萄牙生产葡萄酒的时间成本低于英国，因此在葡萄酒行业中具有绝对优势；

$$a_w^P < a_w^E$$

- ▶ **比较优势**：英国生产1单位酒的机会成本是1.2单位的布，而葡萄牙生产1单位酒的机会成本只有0.8单位的布，因此葡萄牙具有生产酒、英国具有生产布的比较优势。

$$\frac{a_w^E}{a_c^E} = OC_{w/c}^E > OC_{w/c}^P = \frac{a_w^P}{a_c^P} \Leftrightarrow \frac{a_c^P}{a_c^E} > \frac{a_w^P}{a_w^E}$$

例1：比较优势原理

在自给自足的情况下，两个国家两种商品的产量和消费量都为1单位，两种商品的世界总产量都为2单位。

如果两个国家开始进行国际贸易，并各自生产和出口自己具有比较优势的商品，则产量变为：

	布 (cloth)	酒 (wine)
英国 (England)	$220/100=2.2$	0
葡萄牙 (Portugal)	0	$180/80=2.25$

与国际贸易前相比，两种商品的世界总产量都提高了，此时1单位酒相当于2.25/2.2 单位布，这个相对价格介于国际贸易前英国和葡萄牙生产酒的机会成本之间：

$$OC_{w/c}^E > OC_{w/c}^W > OC_{w/c}^P$$

例1：比较优势原理

► 总结：

1. 通过国际贸易，每个国家都可以专门从事自己具有比较优势的行业的生产和出口、同时进口自己不具有比较优势的行业的商品，世界的总产出和每个国家的消费都会提升，福利都会改进；
2. 国际贸易将改变每个国家商品的相对价格，使得全世界商品的价格和工资水平趋于一致。

► 问题：

1. 价格水平记为 P_i^c ，每个国家每种行业的小时工资是多少？当劳动力市场达到均衡时，相对价格水平 P_w^c/P_c^c 等于多少？
2. 如果英国的人口总量提高了，其他情况不变，将如何影响自给自足和国际贸易两种情况下，英国的就业、产出和消费？

例2：最优投资组合

经济问题：



假定有两种资产，一种是收益率固定为 r_f 的无风险资产，另一种是期望收益率为 μ 、收益率方差为 σ^2 的风险资产。

假定投资者的效用是组合资产预期收益率的增函数，是组合资产风险和风险厌恶程度的减函数，具体为：

$$U = \mu_p - \frac{1}{2}A\sigma_p^2$$

请问投资者应该将总资产中多大比例 θ 用于购买风险资产？

例2：最优投资组合

▶ 数学描述：最优投资组合

投资组合的期望收益率和方差分别为：

$$\mu_p = \theta\mu + (1 - \theta)r_f, \quad \sigma_p^2 = \theta^2\sigma^2$$

代入效用函数：

$$\text{Max}_{\theta} U = \theta\mu + (1 - \theta)r_f - \frac{1}{2}A\theta^2\sigma^2$$

由一阶条件求解可得：

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \mu - r_f - A\theta\sigma^2 = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\mu - r_f}{A\sigma^2} = \frac{\text{Sharpe ratio}}{A}$$

例3: 点球博弈 (PENALTY-KICK GAME)



Palacios-Huerta(2003, RES)根据1417个点球数据得到下面的收益矩阵:

射球方(K)/守门员(G)	向左扑 (q)	向右扑 ($1 - q$)
向左踢 (p)	(0.58, -0.58)	(0.95, -0.95)
向右踢 ($1 - p$)	(0.93, -0.93)	(0.70, -0.70)

假定射球方向左踢的概率为 p , 守门员向左扑的概率为 q , 期望收益分别为:

$$\begin{aligned}
 E_K^L &= 0.58q + 0.95(1 - q) & E_K^R &= 0.93q + 0.70(1 - q) \\
 E_G^L &= -0.58p - 0.93(1 - p) & E_G^R &= -0.95p - 0.70(1 - p)
 \end{aligned}$$

当双方向左还是向右的策略无差异时, 可以得到:

$$E_K^L = E_K^R \Rightarrow q = 41.99\%, \quad E_G^L = E_G^R \Rightarrow p = 38.54\%$$

上述结论与实际数据高度吻合:

	g_L (%)	$1 - g_L$ (%)	k_L (%)	$1 - k_L$ (%)
Nash predicted frequencies	41.99	58.01	38.54	61.46
Actual frequencies	42.31	57.69	39.98	60.02

数学有边界

▶ Kendall and Stuart (1961):

一个统计关系式，不管多强也不管多么有启发性，永远不能确立因果方面的关系，对因果关系的理念，必须来自统计学以外，最终来自这种或那种理论。

▶ Box and Draper (1987):

Essentially, all models are wrong, but some are useful.

▶ 布兰查德:

学会宏观经济学教科书的内容我用了一年，但真正了解这些内容背后的约束条件我用了8年。

教育之殇

- ▶ 中国教育最失败的就是学生从上课的第一天到考试结束，都不知道他学的东西能做什么。《数学之美》正好能告诉学生（包括大学生），从小到大的那些数学知识可以如何改造世界。
- ▶ 大学里学了很多数学课，当时并不知道这些数学知识有什么用。读研时因为接触到数据挖掘，这才发现很多看起来很智能的技术，其实是统计学的应用。……如果在大学时能看到这本《数学之美》的话，我相信数学会学得更好的。

—— 吴军：《数学之美（第二版）》之读者赞誉

这个夏天，我们一起.....



读书、读文

动脑、动手

讨论、辩论

.....

实际过程可能是这样的...



希望最后是这样的.....

