资本管制：理论与经验——模型附录

冯子樑、朱美佳、姜天雨、周沈博、赵娅茗

1. 基础模型

1.1 模型设定

假定本国为小型开放经济体，面临比自身规模更大的国际借贷者，即借贷利率满足：$R=1+r$。时间给定为两期：$t=0,1$。本国消费者从贸易中获得 2 期收入分别为y_{T_0}和y_{T_1}，并购买债券b^{i}以平滑消费，因此有：$\beta R=1$ 。

1.2 对单一消费者的最优化问题

假定单一消费者面临下面的两期最优化问题：

$$\underset{c_0^i,c_1^i}{Max}\,U^i=U\left(c_0^i\right)+\beta U\left(c_1^i\right)$$

$$s.t.c_0^i=y_{T_0}-\frac{b^{\mathrm{i}}}{R}$$

$$c_1^i=y_{T_1}+b^{\mathrm{i}}$$

其中债券b^{i}在 1 期收回，在 0 期贴现扣除。

相应的贝尔曼方程为：

$$V\text{（}b^{\mathrm{i}}\text{）}=u\left(y_{T_0}-\frac{b^{\mathrm{i}}}{R}\right)+\beta V\left(b^{\mathrm{i}}\right)=u\left(y_{T_0}-\frac{b^{\mathrm{i}}}{R}\right)+\beta u\left(y_{T_1}+b^{\mathrm{i}}\right)$$

由一阶条件（First Order Condition, FOC）与模型设定：

$$\frac{\partial V}{\partial b^i}=0\text{，}\ \beta R=\ 1\text{，}R=1+r$$

得到：欧拉方程$u'\left(c_0^i\right)=u'\left(c_1^i\right)$，即$c_0^i\ =c_1^i$，代入约束条件可得：

$$\text{最优消费}c_0^i\ =c_1^i=\tfrac{R}{R+1}y_{T_0}+\tfrac{1}{R+1}y_{T_1}$$

1.3 对社会总体的最优化问题

假定债券持有量由政策制定者给定为B，会得到和上述相同的最优化问题和欧拉方程：

$$\underset{c_0^i,c_1^i}{Max}\,U^i=U\left(c_0^i\right)+\beta U\left(c_1^i\right)$$

$$s.t.c_0^i=y_{T_0}-\frac{B}{R}$$

$$c_1^i=y_{T_1}+B$$

相应的贝尔曼方程为：

$$W=\underset{B}{Max}\,u(y_{T0}-\frac{B}{R})+\beta V(B)=\underset{B}{Max}\,u\left(y_{T0}-\frac{B}{R}\right)+\beta u(y_{T1}+B)$$

与上述方法同理，也可得到欧拉方程$u'\left(c_0^i\right)=u'\left(c_1^i\right)$，与最优消费$c_0^i\ =c_1^i=\tfrac{R}{R+1}y_{T_0}+\tfrac{1}{R+1}y_{T_1}$

2. 引入外部性的模型

2.1 模型设定

假定债券的社会总水平为B,在$t=1$时对消费者产生了$\varepsilon(B)$的正外部性。即$\varepsilon'(B)>0$。相应地，国家持有债务，相当于负的债券持有。产生负外部性。即$-\varepsilon'(B)<0$。债券总水平B是个体债券量的加总，对于单一消费者，将B当作外生给定。

2.2 对单一消费者的最优化问题

此时消费者的预算约束和最优化问题改写：

$$\underset{c_0^i,c_1^i}{Max}\, U^i = u\left(c_0^i\right)+\beta u\left(c_1^i\right)$$

$$s.t. c_0^i = y_{T_0}-\frac{b^{\mathrm{i}}}{R}$$

$$c_1^i = y_{T_1}+b^{\mathrm{i}}+\varepsilon(B)$$

相应的贝尔曼方程为：

$$V=u\left(y_{T_0}-\frac{b^{\mathrm{i}}}{R}\right)+\beta V\left(b^{\mathrm{i}},B\right)=u\left(y_{T_0}-\frac{b^{\mathrm{i}}}{R}\right)+\beta u\left(y_{T_1}+b^{\mathrm{i}}+\varepsilon(B)\right)$$

由一阶条件$\frac{\partial V}{\partial b^i}=0$得到：欧拉方程$u'\left(c_0^i\right)=u'\left(c_1^i\right)$，即$c_0^i=c_1^i$，代入约束条件可得：

$$最优消费c_0^i=c_1^i=\frac{R}{R+1}y_{T_0}+\frac{1}{R+1}y_{T_1}-\frac{R}{R+1}\varepsilon(B)$$

2.3 对社会总体的最优化问题

政策制定者将债券产生的外部性纳入 0 期的选择，最优化问题如下：

$$\underset{c_0^i,c_1^i}{Max}\, U^i = u\left(c_0^i\right)+\beta u\left(c_1^i\right)$$

$$s.t. c_0^i = y_{T_0}-\frac{B}{R}$$

$$c_1^i = y_{T_1}+B+\varepsilon(B)$$

相应的贝尔曼方程为：

$$W=\underset{B}{Max}\, u\left(y_{T0}-\frac{b^i}{R}\right)+V(B,B)=\underset{B}{Max}\, u\left(y_{T0}-\frac{b^i}{R}\right)+\beta u(y_{T1}+B+\varepsilon(B))$$

由一阶条件$\frac{\partial W}{\partial B}=0$,得到：欧拉方程$u'\left(c_0^i\right)=u'\left(c_1^i\right)+u'\left(c_1^i\right)\cdot\ \varepsilon'(B)$

引入外部性后，两期的边际效用$u'\left(c_0^i\right)$与$u'\left(c_1^i\right)$第一次出现了不相等的情况，多出来的交叉项$u'\left(c_1^i\right)\cdot\ \varepsilon'(B)>0$为总债券$B$的边际外部成本。

由于设定$\varepsilon'(B)>0$，可得$u'\left(c_0^i\right)>u'\left(c_1^i\right)$，从而$c_0^i<c_1^i$，因此单一消费者的$c_0^i=c_1^i$表现为在 0 期过度的消费或者借贷。

3. 外部性模型细分——金钱外部性

3.1 模型设定

时间转变为三期：$t=0,1,2$。引入贸易品和非贸易品，同时对消费者偏好增加设定：个体 i 在 0 期和 2 期只看重贸易品，在 1 期看重贸易品和非贸易品。将非贸易品的产出标准化为 1（y_{N1}=1），与贸易品产出y_{Tt}都为外生禀赋。个体在 1 期和 2 期都持有债券b_1^i和b_2^i。

最大借款额度存在上限， p_N为 1 期时非贸易品与贸易品之间的相对价格，也即此处的实际汇率。

3.2 最优化模型与预算约束

$$Max\ U^i=U\left(c_{T,0}^i\right)+\beta u\left(c_1^i\right)+\beta^2 U\left(c_{T,2}^i\right)$$

$$c_1^i=c\left(c_{T,1}^i,c_{N,1}^i\right)=\sqrt{c_{T,1}^i c_{N,1}^i}$$

$$\frac{b_2^i}{R}\geq-\phi(p_N),\ \ 0<\phi'(p_N)<1$$

$$s.t\ c_{T,1}^i+p_N c_{N,1}^i=y_{T,1}+p_N y_{N,1}+b_1^i-\frac{b_2^i}{R}$$

$$c_{T,2}^i=y_{T,2}+b_2^i$$

$$\frac{b_2^i}{R}\geq-\phi(p_N)$$

其中：

① 由于消费者在一期对于贸易品和非贸易品都看重，因此c_1^i中$c_{T,1}^i$与$c_{N,1}^i$为齐次。

② 在$c_{T,1}^i+p_N c_{N,1}^i=y_{T,1}+p_N y_{N,1}+b_1^i-\frac{b_2^i}{R}$中：

$p_N c_{N,1}^i$为非贸易品消费×非贸易品价格，转换为以贸易品表示的消费量。

同理$p_N y_{N,1}$表示转换后的贸易品产出。

因此，本式表示：以贸易品衡量的总消费 = 以贸易品衡量的总产出

③ $\frac{b_2^i}{R}\geq-\phi(p_N)$表示最大借款额度，个人借款是非贸易品的相对价格的函数。

$0<\phi'(p_N)<1$的设定是由于非贸易品（如土地）价值降低，会导致担保品价格降低，同时限制借贷能力。

3.3 求解过程推导：先求 1-2 期之间的最优，再求 0 期与 1-2 期之间的最优。

（1）1 期与 2 期之间的最优

最优化方程为：$Max\ U^i=u\left(c_1^i\right)+\beta u\left(c_2^i\right)=Max\ u\left(\sqrt{c_{T,1}^i c_{N,1}^i}\right)+\beta u\left(y_{T,2}+b_2^i\right)$,

约束条件同上，联立$\frac{\partial U^i}{\partial b_2^i}=0$，$\frac{\partial U^i}{\partial c_{T,1}^i}=0$，$\frac{\partial U^i}{\partial c_{N,1}^i}=0$ 三个一阶条件，可得：

$u'\left(c_{T,1}^i\right)=\beta R u'\left(c_{T\cdot 2}^i\right)+\lambda^i$（$\lambda^i$为影子价格，表示 1 期与 2 期边际效用之差），$p_N=\frac{c_{T,1}^i}{c_{N,1}^i}$

其中：

① 在对称均衡中，当非贸易品的市场出清时：$p_N = c_{T,1}$，实际汇率由贸易品的总消费决定。

② 当借款能力达到上限时：$\frac{b_2^i}{R} = -\phi(p_N)$，有$c_{T,1} = y_{T,1} + B_1 + \phi(c_{T,1})$。

③ 总借贷水平对于相对价格的影响：$p_N'(B_1) = \frac{1}{1-\phi'(p_N)}$

由于给定$0 < \phi'(p_N) < 1$，则 $p_N'(B_1) > 1$，即总债券水平B 提升一单位，会导致实际汇率以大于一单位的比例提升，提升借贷能力。

（2）0 期与 1-2 期之间的最优

消费者的价值方程为：

$$V^i(b^i;B) = Max\, U\left(\sqrt{y_{T,1} + b_1^i - \frac{b_2^i}{R}}\right) + \beta u\left(y_{T,2} + b_2^i\right) + \lambda\left[\frac{b_2^i}{R} + \phi\left(p_N(B_1)\right)\right]$$

此时，金钱外部性为$\frac{\partial V}{\partial B} = \lambda\phi'(p_N)\cdot p_N'(B_1) > 0$，说明借贷能力与实际汇率存在正相关关系，国家在0期债券持有量的边际增加，可以增加1期的国内贸易品消费，使得实际汇率升值。

根据基础模型的推导，可得政策消费者的最优税率$\tau = \frac{\lambda\phi'(p_N)\cdot p_N'(B_1)}{u'(c_{T,0})} > 0$。

4. 外部性模型细分——总需求外部性

4.1 模型设定

回归 2 期模型，个体i在 1 期重视贸易品和非贸易品，同时不消费自己生产的非贸易品，但愿意按现行价格按需生产（即付出劳动力l^i ），并出售给j， $l^i = c_{N\cdot 1}^j$。

假定价格具有黏性，将 0-1 期贸易品的国际价格P_T^*标准化为 1，国内贸易品价格$P_T = EP_T^*$, 一期非贸易品价格P_N 标准化为 1，汇率标准化为 1。

4.2 不存在外部性的模型求解

个人付出劳动导致效用降低：$Max\, U^i = u\left(c_{T,0}^i\right) + \beta\left[u\left(c_1^i\right) - d\left(l^i\right)\right]$

$$s.t\; c_1^i = c\left(c_{T,1}^i, c_{N,1}^i\right) = \sqrt{c_{T,1}^i c_{N,1}^i}$$

通过联立$\frac{\partial U^i}{\partial c_{T,1}^i} = 0$，$\frac{\partial U^i}{\partial c_{N,1}^i} = 0$ 2个一阶条件，可得：

引入外部性产生的原因后$u'\left(c_{T,0}^*\right) = \beta u_{T,1}(c_1^*)$，$u_{T,1} = \frac{\partial u\left(c\left(c_{T,1}, c_{N'}\right)\right)}{\partial c_{T,1}}$，说明消费平滑。

$u_{N,1}(c_1^*) = d'(l^*)$，$u_{N,1} = \frac{\partial u}{\partial c_{N,1}}$，说明劳动带来的效用减损可以通过非贸易品来弥补。

$p_N^* = \frac{u_{N,1}^*}{u_{T,1}^*} = \frac{c_{T,1}^{i^*}}{c_{N,1}^{i^*}}$，说明相对价格等于边际替代率。

相对价格与帕累托最优的边际替代率不同时，非贸易品的生产会产生调整以重新平衡经济。

4.3 引入外部性的模型求解

$$Max\ U^i\left(y_{T,0}-\frac{b^i}{R}\right)+\beta\left[ln\sqrt{c_{T,1}^i c_{N,1}^i}-d\left(l^i\right)\right]$$

$$s.t\ P_T c_{T,1}^i+P_N C_{N,1}^i=P_T\left(y_{T,1}^i+b^i\right)+P_N y_{N,1}^i$$

$$y_{N,1}^i=l^i=c_{N,1}$$

其中：

① 1 期产生了非贸易品的消费，因此需要减去相应的劳动带来的效用减损。

② $P_T c_{T,1}^i+P_N C_{N,1}^i=P_T\left(y_{T,1}^i+b^i\right)+P_N y_{N,1}^i$左右两端同除$P_T$，可得：

$$c_{T,1}^i+\frac{P_N}{P_T}c_{N,1}^i=y_{T,1}^i+\frac{P_N}{P_T}y_{N,1}^i+b_1^i$$

③ 市场出清时，非贸易品的产出等于消费，也等于其供给的劳动。

④ 价格粘性，即P_N=P_T。

通过联立$\frac{\partial U^i}{\partial c_{T,1}^i}=0$，$\frac{\partial U^i}{\partial c_{N,1}^i}=0$ 2个一阶条件，结合价格粘性，可得：

$$y_{N,1}^i=c_{N,1}=c_{T,1}，c_{N,1}=c_{T,1}=y_{T,1}+B$$

说明价格粘性下，对于非贸易品的需求取决于消费者的贸易品禀赋和债券持有量。

进一步求解$c_{T,1}^i$与$c_{N,1}^i$，可得：

$$c_{T,1}^i=c_{N,1}^i=\frac{y_{T,1}+b^i+c_{N,1}}{2}=y_{T,1}+\frac{b^i+B}{2}$$

$$y=c_{N,1}+c_{T,1}-B=y_{T,1}+\frac{b^i}{2}-\frac{B}{2}+c_{T,1}$$

说明个体的收入一半来自于贸易品禀赋和个人的债券持有量，另一半来自于由需求和总债券持有量决定的非贸易品生产。

4.4 福利分析

贸易品与非贸易品带来的效用应是一致的：$u_{T,1}=u_{N,1}=\frac{u'(c_1^i)}{2}$。

消费者价值函数为：$V\left(b^i;B\right)=u\left(y_{T,1}+\frac{b^i+B}{2}\right)-d(y_T,1+B)$

此时，总需求外部性为$\frac{\partial V}{\partial B}=u_{N,1}(C_1)-d'(l)$,表示生产一单位非贸易品的边际效用和付出劳动的边际成本之差。

当$\frac{\partial V}{\partial B}$>0:存在非贸易品的超额供给，**增加外国债券持有量**能够带来更高的贸易品消费和非贸易品需求，促进福利改善。

当$\frac{\partial V}{\partial B}$<0：存在非贸易品的超额需求：**减少外国债券持有量**能够减少贸易品消费、降低非贸易品需求，促进福利改善。

根据基础模型的推导，可得政策消费者的最优税率$\tau=\frac{u_{N,1}(c_1)-d'(l)}{u'(c_0)}$。