附录

1. 一般化的网络博弈模型

建立一个收益函数为线性二次的一般化的网络博弈模型。

$\mathrm{N}=\{1,\dots,\mathrm{n}\}$是一个有限的参与者集合。每个参与者$\mathrm{i}\in\mathrm{N}$选择努力程度$z_i\geq 0$，$\mathbf{z}=(z_1\dots z_n)^T$，设定参与者 i 的收益函数为：

$$u_i(\boldsymbol{z})=\alpha_i z_i+\frac{1}{2}\sigma_{ii}z_i^2+\sum_{j\neq i}\sigma_{ij}z_i z_j \qquad 1$$

设定自身影响向量$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$，交互影响矩阵$\boldsymbol{\Sigma}=[\sigma_{ij}]$，可将该网络博弈表示为$\Gamma(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\Sigma})$。

对于模型给出以下假设：

1) $\boldsymbol{\alpha}>\mathbf{0}$，即$\alpha_i>0$，$\forall i\in\mathrm{N}$。

2) 交互影响矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$对称，即$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，表明参与者之间对对方的影响是相同的。

3) $\sigma_{ii}<min\left\{0,\ min\{\sigma_{ij},j\neq i\}\right\}$，体现了自身努力的凹性。

4) $\sigma_{ij}>0$ 或 <0体现了参与者之间存在策略性互补或策略性替代。

5) 不失一般性地，我们还可以进一步假设$\sigma_{ii}=\sigma<0$[1]。

根据 1 式，求解纳什均衡的一阶条件为：

$$\frac{\partial u_i}{\partial z_i}=\alpha_i+\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}z_j=0\text{，对于所有 }\mathrm{i}=1\dots\mathrm{N}$$

用矩阵形式表示为：

$$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{z}\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{0} \qquad 2$$

一定条件下，存在唯一内点纳什均衡解：

$$\boldsymbol{z}^*=-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\cdot\mathbf{1} \qquad 3$$

(其中 $\mathbf{1}$ 表示所有元素都为 1 的$\mathrm{N}\times 1$维向量。)

2. 交互影响矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$的分解

设定参数$\underline{\sigma}$，$\overline{\sigma}$，γ，λ如下：

---

[1] 我们可以通过构造$\mathrm{D}=\mathrm{diag}(\frac{\sigma}{\sigma_{11}},\dots,\frac{\sigma}{\sigma_{nn}})$(对角线元素分别为$\frac{\sigma}{\sigma_{11}},\dots,\frac{\sigma}{\sigma_{nn}}$，其他元素均为 0 的$\mathrm{N}\times\mathrm{N}$方阵)和博弈$\Gamma(\mathrm{D}\alpha,\ \mathrm{D}\Sigma)$，把博弈$\Gamma(\alpha,\ \Sigma)$中的$\sigma_{ii}$转换$\Gamma(\mathrm{D}\alpha,\ \mathrm{D}\Sigma)$为的$\sigma$；又因为$\Gamma(\alpha,\ \Sigma)$和$\Gamma(\mathrm{D}\alpha,\ \mathrm{D}\Sigma)$两个博弈的纳什均衡结果一致，所以假设$\sigma_{ii}=\sigma$不影响最终的均衡结果。

$$\begin{cases} \underline{\sigma} = min\{\sigma_{ij}|i \neq j\} \\ \overline{\sigma} = max\{\sigma_{ij}|i \neq j\} \\ \gamma = -\min\{0，\underline{\sigma}\} = \begin{cases} 0，\underline{\sigma} \geq 0 \\ -\underline{\sigma}，\underline{\sigma} < 0 \end{cases} \\ \lambda = \gamma + \overline{\sigma} = \begin{cases} \overline{\sigma}，\underline{\sigma} \geq 0 \\ \overline{\sigma} - \underline{\sigma}，\underline{\sigma} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

显然$\gamma \geq 0$，$\lambda \geq 0$。

将参与者 j 对参与者 i 的影响定义为：

$$g_{ij} = \frac{\sigma_{ij}+\gamma}{\lambda} = \begin{cases} \frac{\sigma_{ij}}{\overline{\sigma}}，\underline{\sigma} \geq 0 \\ \frac{\sigma_{ij}-\underline{\sigma}}{\overline{\sigma}-\underline{\sigma}}，\underline{\sigma} < 0 \end{cases}，i \neq j \qquad 4$$

设定自身对自身的影响$g_{ii} = 0$，则邻接矩阵$\mathbf{G} = [g_{ij}]$是一个对角线元素均为 0 的非负方阵。

将自身努力的影响定义为：

$$\sigma = -\beta - \gamma = \begin{cases} -\beta，\underline{\sigma} \geq 0 \\ -\beta + \underline{\sigma}，\underline{\sigma} < 0 \end{cases} \qquad 5$$

(其中$\beta > 0$)

由式 4 可得他人努力的影响为

$$\sigma_{ij} = -\gamma + \lambda g_{ij}$$

由式 5 可得自身努力的影响为

$$\sigma_{ii} = \sigma = -\beta - \gamma + \lambda g_{ii}$$

σ_{ii}与σ_{ij}形式上相差$-\beta$。

∴ 交互影响矩阵$\mathbf{\Sigma}$可分解为：

$$\mathbf{\Sigma} = -\beta\mathbf{I} - \gamma\mathbf{J} + \lambda\mathbf{G} \qquad 6$$

其中，$\mathbf{I}$为单位矩阵，$\mathbf{J}$为元素均为 1 的$N \times N$方阵。$-\beta\mathbf{I}$，$-\gamma\mathbf{J}$，$\lambda\mathbf{G}$分别表示自身凹性，全局替代性和局部互补性。

根据式 6，参与者的收益函数(式 1)可以改写为：

$$u_i = \alpha_i z_i - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)z_i^2 - \gamma\sum_{j=1}^{n} z_i z_j + \lambda\sum_{j=1}^{n} g_{ij} z_i z_j \qquad 7$$

将$\beta = 1$，$\gamma = 0$，$\lambda = \phi$代入式 7，便可得文中的基础收益函数(1)。

3. 可加权中心性的一般定义

一般的可加权中心性定义为：

$$\boldsymbol{W_u}(\boldsymbol{g}, a) = (\boldsymbol{I} - a\boldsymbol{G^{-1}})\boldsymbol{u} = \sum_{\boldsymbol{p=0}}^{+\infty} a^{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{G^p}\boldsymbol{u} \qquad 8$$

其中，$\boldsymbol{u}$表示$N \times 1$维加权向量，$\boldsymbol{g}$表示网络， a为衰减系数，p 为步径数。

显然，可加权中心性有以下性质：

$$\boldsymbol{W_u}(\boldsymbol{g},a)=\boldsymbol{u}\boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{g},a) \tag{9}$$

令$\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{G}\boldsymbol{1}$，便可得到文中的卡茨—博纳西克中心性：

$$\mathbf{b}(\boldsymbol{g},a)=\boldsymbol{W_{aG1}}(\boldsymbol{g},a)=(\boldsymbol{I}-a\boldsymbol{G^{-1}})a\boldsymbol{G}\boldsymbol{1} \tag{10}$$

4. 纳什均衡与中心性的关系

把式 6 代入式 3，得：

$$-\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{z}^*=(\beta\mathbf{I}+\gamma\mathbf{J}-\lambda\mathbf{G})\boldsymbol{z}^*=\boldsymbol{\alpha} \tag{11}$$

解式 11 得

$$\beta\boldsymbol{z}^*=\left(\mathbf{1}-\frac{\lambda}{\beta}\boldsymbol{G}\right)^{-1}(\boldsymbol{\alpha}-\gamma\boldsymbol{z}^*\mathbf{1})=\left(\mathbf{1}-\frac{\lambda}{\beta}\boldsymbol{G}\right)^{-1}\boldsymbol{\alpha}-\left(\mathbf{1}-\frac{\lambda}{\beta}\boldsymbol{G}\right)^{-1}\gamma\boldsymbol{z}^*\mathbf{1}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{W_1}\left(\boldsymbol{g},\frac{\lambda}{\beta}\right)-\gamma\boldsymbol{z}^*\boldsymbol{W_1}\left(\boldsymbol{g},\frac{\lambda}{\beta}\right)$$

移项，得到用中心性表示的纳什均衡$\boldsymbol{z}^*$：

$$\boldsymbol{z}^*=\frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{W_1}\left(\boldsymbol{g},\frac{\lambda}{\beta}\right)}{\beta+\gamma\boldsymbol{W_1}\left(\boldsymbol{g},\frac{\lambda}{\beta}\right)} \tag{12}$$

5. 命题 1 证明

将文中假设的参数值：$\beta=1$，$\gamma=0$，$\lambda=\phi$，$\alpha_i=\mu g_i\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mu\boldsymbol{G}\boldsymbol{1}$代入式 12，得：

$$\boldsymbol{z}^*=\mu\boldsymbol{G}\boldsymbol{1}\boldsymbol{W_1}(\boldsymbol{g},\Phi)=\frac{\mu}{\Phi}\boldsymbol{W_{\Phi G1}}(\boldsymbol{g},\Phi)=\frac{\mu}{\Phi}\mathbf{b}(\boldsymbol{g},\Phi)$$

其中，上式第二个等式利用了可加权中心性的性质(式 9)，第三个等式利用了式 10。所以：

$$\boldsymbol{z}^*=\frac{\mu}{\Phi}\mathbf{b}(\boldsymbol{g},\Phi)$$

∴ 证毕。

6. 命题 2 证明

先不妨假设存在两组结构参数$(\mu，\Phi)$和$(\mu'，\Phi')$，可以得到文中相同的简化形式(10)，即

$$\mu(\mathbf{1}-\Phi\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{1}=\mu'(\mathbf{1}-\Phi'\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{1}$$

两边同时乘以$(\mathbf{1}-\Phi\boldsymbol{G})(\mathbf{1}-\Phi'\boldsymbol{G})$，移项得：

$$(\mu-\mu')\mathbf{G}\mathbf{1}+(\mu'\Phi-\mu\Phi')\boldsymbol{G^2}\mathbf{1}=\mathbf{0}$$

显然，要使$(\mu，\Phi)=(\mu'，\Phi')$是上式的唯一解，必须满足$\mu\neq0$，且$\mathbf{G}\mathbf{1}$和$\boldsymbol{G^2}\mathbf{1}$有两阶秩。

$\mathbf{G}\mathbf{1}$和$\boldsymbol{G^2}\mathbf{1}$有两阶秩➔对于某些$i\neq j$，满足$\frac{g_i^{[2]}}{g_i}\neq\frac{g_j^{[2]}}{g_j}$。

$\therefore$ 当$\mu \neq 0$以及$\frac{g_i^{[2]}}{g_i} \neq \frac{g_j^{[2]}}{g_j}$时，$(\mu，\Phi)$唯一存在。

$\therefore$ 证毕