一、实证模型似然函数推导与参数估计思路

模型的主要方法是通过推导出样本的似然函数，用极大似然估计法进行参数估计。

首先给出效用函数：

$$U_{ijlt}=\gamma_{g(i)l}^{1}X_{ijl}^{1}+\gamma_{g(i)}^{2}X_{ij}^{2}+\beta_{g(i)}^{1}Z_{j}^{1}+\beta_{g(i)}^{2}Z_{ij}^{2}+v_{ijlt} \quad (1)$$

可观测部分为：

$$V_{ijlt}=\gamma_{g(i)l}^{1}X_{ijl}^{1}+\gamma_{g(i)}^{2}X_{ij}^{2}+\beta_{g(i)}^{1}Z_{j}^{1}+\beta_{g(i)}^{2}Z_{ij}^{2}$$

设 J 是所有餐厅组成的集合，L 是所有出行方式的集合。

STEP1 个人拜访一家餐厅的概率

根据离散选择的 Logit 模型：

$$P(d_{ijlt}=1\mid X_i,Z_i,J;(\gamma,\beta))=\frac{\exp(V_{ijl})}{\sum_{j'\in J}\sum_{l'\in L}\exp(V_{ij'l'})} \quad (3)$$

合并所有出行方式，即去掉 l：

$$P(d_{ijt}=1\mid X_i,Z_i,J;(\gamma,\beta))=P\left(\sum_{l\in L}d_{ijlt}=1\mid X_i,Z_i,J;(\gamma,\beta)\right)$$

根据模型设定，在确定终点餐厅的情况下，一个人的出行方式是唯一的

即如果 $d_{ijt}=1$，在取遍 $l\in L$ 时，有且仅有一个 $d_{ijlt}=1$，其余都是 0

将 $\sum_{l\in L}d_{ijlt}=1$ 作为一个事件，则有互斥分解：

$$\left\{\sum_{l\in L}d_{ijlt}=1\right\}=\bigcup_{l\in L}\left\{d_{ijlt}=1,d_{ijl't}=0,\forall l'\neq l\right\}$$

因此求和算子与概率算子可交换：

$$P(d_{ijt}=1\mid X_i,Z_i,J;(\gamma,\beta))=P\left(\sum_{l\in L}d_{ijlt}=1\right)=\sum_{l\in L}P\left(d_{ijlt}=1\right)$$

$$=\sum_{l\in L}\frac{\exp(V_{ijl})}{\sum_{j'\in J}\sum_{l'\in L}\exp(V_{ij'l'})} \quad (5)$$

(为方便展示，后面省去了情景条件 $X_i,Z_i,J;(\gamma,\beta)$，下面类似)

STEP2 个人为餐厅撰写评论的概率

用 $J_{it}{}'$ 表示消费者 i 在 t 时刻之前已经拜访过但还没撰写过评论的餐厅，p_{it}^{*} 表示消费者 i 在已拜访未评论的前提下给一家餐厅撰写评论的概率，则：

$$P\left(d_{ijt}^{*}=1 \mid X_i, Z_i, J_{it}, J_{it}{}';(\gamma,\beta,p_{it}^{*})\right)=P\left(d_{ijt}^{*}=1 \mid d_{ijt}=1\right)\cdot P\left(d_{ijt}=1\right)$$

$$=p_{it}^{*}\cdot 1\left\{j\neq 0, j\in J_{it}{}'\right\}\cdot\sum_{l\in L}\frac{\exp(V_{ijl})}{\sum_{j'\in J}\sum_{l'\in L}\exp(V_{ij'l'})} \quad (6)$$[1]

如果消费者 i 在 t 时刻要撰写一条评论 $(d_{it}^{*}=1)$，那么这条评论分配到餐厅 j 上 $(d_{ijt}^{*}=1)$ 的概率：

$$P\left(d_{ijt}^{*}=1 \mid d_{it}^{*}=1, X_i, Z_i, J_{it}{}';(\gamma,\beta)\right)=\frac{P(d_{ijt}^{*}=1, d_{it}^{*}=1)}{P(d_{it}^{*}=1)} \quad (*)$$[2]

分子上, 由于 $d_{ijt}^{*}=1$ 是 $d_{it}^{*}=1$ 的充分条件, 所以 $P(d_{ijt}^{*}=1, d_{it}^{*}=1)=P(d_{ijt}^{*}=1)$

分母上，$P(d_{it}^{*}=1)=P\left(\sum_{j'\in J} d_{ijt}^{*}=1\right)=\sum_{j'\in J}P\left(d_{ijt}^{*}=1\right)$

所以：$P\left(d_{ijt}^{*}=1 \mid d_{it}^{*}=1, X_i, Z_i, J_{it}{}';(\gamma,\beta)\right)=\dfrac{P(d_{ijt}^{*}=1)}{\sum_{j'\in J}P\left(d_{ijt}^{*}=1\right)}$

把（6）式代入（*）:

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{p_{it}^{*}\cdot 1\left\{j\neq 0, j\in J_{it}{}'\right\}\cdot\sum_{l\in L}\frac{\exp(V_{ijl})}{\sum_{j'\in J}\sum_{l'\in L}\exp(V_{ij'l'})}}{\sum_{j\in J}\left(p_{it}^{*}\cdot 1\left\{j\neq 0, j\in J_{it}{}'\right\}\cdot\sum_{l\in L}\frac{\exp(V_{ijl})}{\sum_{j'\in J}\sum_{l'\in L}\exp(V_{ij'l'})}\right)}$$

把与 j 无关的项整理到 $\sum_{j\in J}\cdot$ 的外面：

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{\left(\sum_{j'\in J}\sum_{l'\in L}\exp(V_{ij'l'})\right)\cdot p_{it}^{*}\cdot 1\left\{j\neq 0, j\in J_{it}{}'\right\}\cdot\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}{\left(\sum_{j'\in J}\sum_{l'\in L}\exp(V_{ij'l'})\right)\cdot p_{it}^{*}\cdot\sum_{j\in J}\left(1\left\{j\neq 0, j\in J_{it}{}'\right\}\cdot\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})\right)}$$

---

[1] 1{A}=1，if A is True，else 1{A}=0

[2] 省略了概率条件 $X_i, Z_i, J_{it}{}';(\gamma,\beta)$

约掉相同的项：

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{1\left\{ j \neq 0, j \in J_{it}' \right\} \cdot \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})}{\sum_{j \in J} \left(1\left\{ j \neq 0, j \in J_{it}' \right\} \cdot \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl}) \right)}$$

$1\left\{ j \neq 0, j \in J_{it}' \right\}$ 是集合 J_{it}' 的特征函数，满足 $\sum_{j \in J} 1\left\{ j \neq 0, j \in J_{it}' \right\} \cdot K_j \equiv \sum_{j \in J_{it}'} K_j$，就有：

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{1\left\{ j \neq 0, j \in J_{it}' \right\} \cdot \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})}{\sum_{j \in J_{it'}} \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})} \quad (7)$$

STEP3 缩减餐厅选择集合
(减少维度以保证计算机求解效率)

根据 McFadden（1973）的方法，缩小餐厅样本集 $J_{it}' \to S_{it}$：

S_{it} 是 J_{it}' 的子集，包含了消费者 i 恰在 t 时刻评论的那家餐厅（即满足 $d_{ijt}^* = 1$ 的那家餐厅），并等概率随机加入 J_{it}' 中的一些餐厅作为替代，这样就有：

$$P\left(d_{ijt}^* = 1 \mid d_{it}^* = 1, S_{it} \right) = \frac{P\left(d_{ijt}^* = 1, S_{it} \mid d_{it}^* = 1 \right)}{P\left(S_{it} \mid d_{it}^* = 1 \right)}$$

由全概率公式：

$$= \frac{P\left(S_{it} \mid d_{ijt}^* = 1, d_{it}^* = 1 \right) \cdot P\left(d_{ijt}^* = 1 \mid d_{it}^* = 1 \right)}{\sum_{j' \in J_{it}'} P\left(S_{it} \mid d_{ij't}^* = 1, d_{it}^* = 1 \right) \cdot P\left(d_{ij't}^* = 1 \mid d_{it}^* = 1 \right)}$$ [3]（**）

现考察 $P\left(S_{it} \mid d_{ijt}^* = 1, d_{it}^* = 1 \right)$：

（i）如果 $j \in S_{it}$，由于 S_{it} 是随机等概率生成的，$P\left(S_{it} \mid d_{ijt}^* = 1, d_{it}^* = 1 \right)$ 为常数，设为 κ_{it}

[3] 概率条件中省略了 $X_i, Z_i; (\gamma, \beta)$

（ii）如果 $j \notin S_{it}$，由于 $d_{ijt}^{*}=1$，据 S_{it} 定义，要求含有 j，矛盾，

因此 $P\left(S_{it} \mid d_{ijt}^{*}=1, d_{it}^{*}=1\right)=0$

综上可以得到：$P\left(S_{it} \mid d_{ijt}^{*}=1, d_{it}^{*}=1\right)=1\left\{j \in S_{it}\right\} \cdot \kappa_{it}$

代入（**）式：

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1\left\{j \in S_{it}\right\} \cdot \kappa_{it} \cdot P\left(d_{ijt}^{*}=1 \mid d_{it}^{*}=1\right)}{\sum_{j' \in J_{it}'} 1\left\{j' \in S_{it}\right\} \cdot \kappa_{it} \cdot P\left(d_{ij't}^{*}=1 \mid d_{it}^{*}=1\right)}$$

恒等变换：

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1\left\{j \in S_{it}\right\} \cdot P\left(d_{ijt}^{*}=1 \mid d_{it}^{*}=1\right)}{\sum_{j' \in S_{it}} P\left(d_{ij't}^{*}=1 \mid d_{it}^{*}=1\right)}$$

仿照（7）式的推导：

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1\left\{j \in S_{it}\right\} \cdot \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})}{\sum_{j \in S_{it}} \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})} \quad （9）$$

STEP4 关于一个消费者的似然函数

现观测到一个消费者 i 有如下行为序列：

在 $T_1, T_2, \ldots, T_i$ 时刻分别给餐厅 $J_{iT_1}, J_{iT_2}, \ldots, J_{iT_i}$ 撰写了评论，

此事发生的概率就是（9）式关于 $t=T_1, T_2, \ldots, T_i$ 的连乘式：

$$P(\, i \text{ reviews } \; J_{iT_1}, J_{iT_2}, \ldots, J_{iT_i} \; \text{ at } \; T_1, T_2, \ldots, T_i)=\prod_{t=T_1}^{T_i} \frac{1\left\{j \in S_{it}\right\} \cdot \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})}{\sum_{j \in S_{it}} \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})} \quad （10）$$

STEP5 样本似然函数

再考虑所有消费者 $i=1,2,\ldots,N$ 的行为，就是（10）式关于 $i=1,2,\ldots,N$ 的连乘式：

$$P(\, i \text{ reviews } \; J_{iT_1}, J_{iT_2}, \ldots, J_{iT_i} \; \text{ at } \; T_1, T_2, \ldots, T_i \; \text{ for } i=1,2,\ldots,N)$$

$$=\prod_{i=1}^{N} \prod_{t=T_1}^{T_i} \frac{1\left\{j \in S_{it}\right\} \cdot \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})}{\sum_{j \in S_{it}} \sum_{l \in L} \exp(V_{ijl})}$$

由于观测到的样本已发生：

$$=\prod_{i=1}^{N}\prod_{t=T_1}^{T_i}\frac{\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}{\sum_{j\in S_{it}}\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}$$

这就是基于样本观测结果的似然函数，参数估计即最优化似然函数：

$$(\tilde{\gamma},\tilde{\beta})=\arg\max_{(\gamma,\beta)}\prod_{i=1}^{N}\prod_{t=T_1}^{T_i}\frac{\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}{\sum_{j\in S_{it}}\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}$$

或最优化对数似然函数：

$$(\tilde{\gamma},\tilde{\beta})=\arg\max_{(\gamma,\beta)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=T_1}^{T_i}\ln\frac{\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}{\sum_{j\in S_{it}}\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}$$

给定 S_{it},所有 $j\in S_{it}$ 中,仅有一个 j 满足 $1\left\{d_{ijt}^{*}=1\right\}=1$；其余 $1\left\{d_{ij't}^{*}=1\right\}=0$

因此：

$$(\tilde{\gamma},\tilde{\beta})=\arg\max_{(\gamma,\beta)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=T_1}^{T_i}\sum_{j\in S_{it}}1\left\{d_{ijt}^{*}=1\right\}\cdot\ln\frac{\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}{\sum_{j\in S_{it}}\sum_{l\in L}\exp(V_{ijl})}\qquad（11）$$

二、Dissimilarity Indice 的估计方法

重点讨论 $\Pr(d_{ij}=1\,|\,g(i)=g)$ 的估计方法，其余类似.

$$P(d_{ij}=1\,|\,g(i)=g)=\frac{P(d_{ij}=1,g(i)=g)}{P(g(i)=g)}=\frac{P(d_{ij}=1,g(i)=g)}{\sum_{j}P(d_{ij}=1,g(i)=g)}$$

设 h_i 和 w_i 为 i 的居住地和工作地，则：

$$P(d_{ij}=1,g(i)=g)=\sum_{h}\sum_{w}P(d_{ij}=1,g(i)=g,h_i=h,w_i=w)$$

$$=\sum_{h}\sum_{w}P(d_{ij}=1\,|\,g(i)=g,h_i=h,w_i=w)\cdot P(g(i)=g\,|\,h_i=h,w_i=w)\cdot P(w_i=w\,|\,h_i=h)\cdot P(h_i=h)$$

假设在 h 给定时，g_i 与 w_i 无关：

$$=\sum_{h}\sum_{w}P(d_{ij}=1\,|\,g(i)=g,h_i=h,w_i=w)\cdot P(g(i)=g\,|\,h_i=h)\cdot P(w_i=w\,|\,h_i=h)\cdot P(h_i=h)$$

因此:

$$P(d_{ij}=1|g(i)=g)$$

$$=\frac{\sum_h\sum_w P(d_{ij}=1|g(i)=g,h_i=h,w_i=w)\cdot P(g(i)=g|h_i=h)\cdot P(w_i=w|h_i=h)\cdot P(h_i=h)}{\sum_j\sum_h\sum_w P(d_{ij}=1|g(i)=g,h_i=h,w_i=w)\cdot P(g(i)=g|h_i=h)\cdot P(w_i=w|h_i=h)\cdot P(h_i=h)}$$

其中 $P(d_{ij}=1|g(i)=g,h_i=h,w_i=w)$ 在前文中已经介绍,

$P(g(i)=g|h_i=h)$ 、 $P(w_i=w|h_i=h)$ 、 $P(h_i=h)$ 三项可以认为是人口统计上的结果(用一个群体占总体的比例来表示相应的概率).

编辑|数量经济学小组成员 许多