DYNAMIC SPATIAL GENERAL EQUILIBRIUM

龚力川 王力 苏嘉畅

1.引言

- 经济学的一个核心研究问题是探究经济活动的空间分布对基本面冲击（如生产力变化）的反应。一般而言，由于流动要素(劳动力)的迁移摩擦和非流动要素(资本结构)的逐步积累，这种反应是渐进的。
- 研究的一个难点是在具有人口流动的经济地理模型中如何对前瞻性的资本投资进行建模。因为每个地点的投资和迁移决策不仅相互依赖，还取决于未来所有时期所有地点的决策。

变量含义

(1)结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$

它们分别是跨期效用常替代弹性、贸易弹性等结构参数，在具体的模型中会给予解释。

(2)外生变量 $\{z_i^*, b_i^*, \tau_{ni}^*, \kappa_{ni}^*\}$

下标 i 和 n 表示地区，z 表示生产力，b 表示公共设施，τ 表示地区间贸易成本，κ 表示地区间移民成本。我们认为这些变量是外生给定的。

(3)内生变量 $\{\ell_i^*, k_i^*, w_i^*, R_i^*, v_i^*\}$

下标 i 表示地区，它们分别表示人口、资本、工资水平、资本积累率和工人效用。

在进行正式的理论分析之前，我们需要明确模型的假定：

(1)假定一：社会中有两类人，工人与房东(或资本所有者)。工人当期工资完全用于消费，不存在跨期投资与储蓄，而且工人可以进行跨区域流动。房东每一期获得资本收益，能够进行消费与投资决策，但由于资本(在本文中被定义为实物资产)的不可流动性，房东始终在某一地区。

(2)假定二：不同地区间具有贸易成本，人口流动具有移民成本。

2.1厂商生产决策

生产函数具有CD形式：

$$y_{it} = z_{it}\left(\frac{\ell_{it}}{\mu}\right)^{\mu}\left(\frac{k_{it}}{1-\mu}\right)^{1-\mu}, \quad 0<\mu<1,$$

最优决策下，产品价格可表示为：

$$p_{nit} = \tau_{nit}p_{iit} = \frac{\tau_{nit}w_{it}^{\mu}r_{it}^{1-\mu}}{z_{it}},$$

2.2工人消费决策

效用函数具有CES形式：

$$u_{nt}^{w} = b_{nt}c_{nt}^{w}, \quad c_{nt}^{w} = \left[\sum_{i=1}^{N}(c_{ni}^{w})^{\frac{\theta}{\theta+1}}\right]^{\frac{\theta+1}{\theta}}, \theta=\sigma-1, \sigma>1,$$

工人的最大效用可表示为：

$$u_{nt}^{w} = \frac{b_{nt}w_{nt}}{p_{nt}}, \quad p_{nt} = \left[\sum_{i=1}^{N}p_{nit}^{-\theta}\right]^{-1/\theta}.$$

2.3房东的消费与投资决策

效用函数函数具有跨期的常替代弹性，因为我们假设工人的工资在当期完全使用而房东可以进行跨期的投资。房东特定时期效用函数形式与工人相同：

$$v_{it}^{k}=\mathbb{E}_t\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{t+s}\frac{\left(c_{it+s}^{k}\right)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi},$$

优化问题约束条件：

$$r_{it}k_{it}=p_{it}\left(c_{it}^{k}+k_{it+1}-(1-\delta)k_{it}\right).$$

房东的消费与投资可由下面的表达式确定，表明房东的决策包含对未来的预期。

$$s_{it}^{-1}=1+\beta^{\psi}\left(\mathbb{E}_t\left[R_{it+1}^{\frac{\psi-1}{\psi}}s_{it+1}^{-\frac{1}{\psi}}\right]\right)^{\psi}.$$

其中：$R_{it}\equiv 1-\delta+r_{it}/p_{it}$ 表示考虑折旧后的总资本增长率

$c_{it}=s_{it}R_{it}k_{it}$ 表示当期消费占总资本的比例

$k_{it+1}=(1-s_{it})R_{it}k_{it}$ 表示下一期房东总资本

2.4工人的移民决策

工人的移民决策由未来居住在某地的期望效用与移民成本决定，目标函数如下：

$$\mathbb{V}_{it}^{w} = \ln u_{it}^{w} + \max_{\{g\}_1^N}\left\{\beta \mathbb{E}_t\left[\mathbb{V}_{gt+1}^{w}\right] - \kappa_{git} + \rho \epsilon_{gt}\right\},$$

其中随机扰动项服从极值分布： $\text{CDF } F(\epsilon) = e^{-e^{(-\epsilon-\overline{\gamma})}}$

2.5产品市场与资本市场出清条件

通过各地消费某地区产品占当地总收入的比例进行分解，得到产品市场出清条件：

$$(w_{it}\ell_{it} + r_{it}k_{it}) = \sum_{n=1}^{N} S_{nit}(w_{nt}\ell_{nt} + r_{nt}k_{nt}),$$

厂商利润最大化决策给出了资本市场出清条件：

$$r_{it}k_{it} = \frac{1-\mu}{\mu} w_{it}\ell_{it}.$$

2.6总体均衡

利用上述五个最优化问题的解，我们可以给出总体均衡的表达式

(1)资本积累与价格水平

$$k_{it+1}=(1-s_{it})\left(1-\delta+\frac{1-\mu}{\mu}\frac{w_{it}\ell_{it}}{p_{it}k_{it}}\right)k_{it},$$

$$p_{nt}=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(w_{it}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^{1-\mu}(\ell_{it}/k_{it})^{1-\mu}\tau_{ni}/z_i\right)^{-\theta}\right]^{-1/\theta}.$$

(2)贸易往来与人口流动

$$S_{nit}=\frac{\left(w_{it}(\ell_{it}/k_{it})^{1-\mu}\tau_{ni}/z_i\right)^{-\theta}}{\sum_{m=1}^{N}\left(w_{mt}(\ell_{mt}/k_{mt})^{1-\mu}\tau_{nm}/z_m\right)^{-\theta}},\qquad T_{int}\equiv\frac{S_{nit}w_{nt}\ell_{nt}}{w_{it}\ell_{it}},$$

$$D_{igt}=\frac{\left(\exp(\beta\mathbb{E}_t v^w_{gt+1})/\kappa_{git}\right)^{1/\rho}}{\sum_{m=1}^{N}\left(\exp(\beta\mathbb{E}_t v^w_{mt+1})/\kappa_{mit}\right)^{1/\rho}},\qquad E_{git}\equiv\frac{\ell_{it}D_{igt}}{\ell_{gt+1}},$$

矩阵**S,T,D,E**分别衡量了进口结构、出口结构、移民流出结构和移民流入结构。

3 谱分析

已有的分析给出了经济的动态转移路径，具体而言：在已知外生变量$\{z_i^*, b_i^*, \tau_{ni}^*, \kappa_{ni}^*\}$ 及结构参数的情况下，可以求出经济状态变量（内生）的转移路径 $\{w_{it}, R_{it}, v_{it}, \ell_{it+1}, k_{it+1}\}_{t=0}^{\infty}$ 。

由于均衡状态方程组在高维状态空间下具有非封闭形式的运算，不利于进行实证研究。文章通过对均衡方程的全微分并忽略泰勒展开表达式中的二次及以上的表达式，将均衡状态转移方程组线性化。在线性化的基础上，作者利用矩阵的特征分解以及谱分析，给出了经济在面临冲击的情况下状态变量向稳态收敛的转移路径与收敛速度。

在下一部分中，我们将展示如何把技术水平 ***z*** 与公共设施 ***b*** 的变化分解为特征向量的线性组合，进而将这种变化表示为“**特征冲击**”的组合，这种表示方法意味着任何一个对经济的冲击都可以分解为多个“**基本的**”冲击之和。基于特征向量的矩阵运算远远优于高维非封闭形式运算，所以在实证中可以很轻松的给出某个经济冲击对人口转移、资本积累等内生变量的影响，而且可以分析这种冲击对稳态收敛速度的影响。

3.1转移路径线性化

对转移方程组全微分，并且取一阶对数差分，可以得到如下线性方程组：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{p}}_t &= \boldsymbol{S}\big(\widetilde{\boldsymbol{w}}_t - \widetilde{\boldsymbol{z}}_t - (1-\mu)(\widetilde{\boldsymbol{k}}_t - \widetilde{\boldsymbol{\ell}}_t)\big),\\
\widetilde{\boldsymbol{k}}_{t+1} &= \widetilde{\boldsymbol{k}}_t + \big(1-\beta(1-\delta)\big)(\widetilde{\boldsymbol{w}}_t - \widetilde{\boldsymbol{p}}_t - \widetilde{\boldsymbol{k}}_t + \widetilde{\boldsymbol{\ell}}_t)\\
&\quad + \big(1-\beta(1-\delta)\big)\frac{1-\beta}{\beta}(\psi-1)\\
&\quad \times \mathbb{E}_t \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s (\widetilde{\boldsymbol{w}}_{t+s} - \widetilde{\boldsymbol{p}}_{t+s} - \widetilde{\boldsymbol{k}}_{t+s} + \widetilde{\boldsymbol{\ell}}_{t+s}),\\
[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}+\theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TS})]\widetilde{\boldsymbol{w}}_t &= \big[-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T})\widetilde{\boldsymbol{\ell}}_t + \theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{TS})\big(\widetilde{\boldsymbol{z}}_t + (1-\mu)(\widetilde{\boldsymbol{k}}_t - \widetilde{\boldsymbol{\ell}}_t)\big)\big],\\
\widetilde{\boldsymbol{\ell}}_{t+1} &= \boldsymbol{E}\widetilde{\boldsymbol{\ell}}_t + \frac{\beta}{\rho}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{ED})\mathbb{E}_t\widetilde{\boldsymbol{v}}_{t+1},\\
\widetilde{\boldsymbol{v}}_t &= \widetilde{\boldsymbol{w}}_t - \widetilde{\boldsymbol{p}}_t + \widetilde{\boldsymbol{b}}_t + \beta\boldsymbol{D}\mathbb{E}_t\widetilde{\boldsymbol{v}}_{t+1},
\end{aligned}
$$

上述方程组可以简化为二阶递推差分方程：

$$
\boldsymbol{\Psi}\widetilde{\boldsymbol{x}}_{t+2} = \boldsymbol{\Gamma}\widetilde{\boldsymbol{x}}_{t+1} + \boldsymbol{\Theta}\widetilde{\boldsymbol{x}}_t + \boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{f}},
$$

其中，***x***表示内生变量，***f***表示外生变量，上标表示对数一阶差分。

3.2特征分解

二阶线性方程组可以简化为如下一阶形式:

$$\tilde{x}_{t+1} = P\tilde{x}_t + R\tilde{f} \quad for\ t \geq 0.$$

其中: $P = U\Lambda U^{-1}$，具有特征值分解，且U是右特征向量构成的矩阵。

我们称 P 为转移矩阵，因为它是递推方程中的系数。在后面的分析中可以看到，转移矩阵决定了转移路径的一系列特征。

$R = (\Psi P + \Psi - \Gamma)^{-1}\Pi$，我们称 R 为影响矩阵。

这个方程具有如下通解形式:

$$\ln x_t - \ln x_{-1} = \sum_{s=0}^{t} P^s(\ln x_0 - \ln x_{-1}) + \sum_{s=0}^{t-1} P^s R\tilde{f} \qquad \text{for all } t \geq 1.$$

其中: x_{-1} 表示初始稳态。我们定义初始稳态为：经济在最初的外生变量与结构参数不变的情况下，达到稳定时的经济状态。上式的经济学含义是，t 时期经济与稳态的差异可以被分解为两部分：一部分由经济初始状态与稳态的差异决定；另一部分由一次性的外生变量变化（即经济冲击）决定。

这一部分我们提到的经济冲击均是一次性的，并导致外生变量永久性的变化，而且我们假定行为人可以完美预见这一冲击。在后续的拓展中，可以证明：转移路径表达式在冲击序列 $\{ f \}$ 不可预见的情况下仍然成立。

特征冲击：我们定义一次冲击为“特征冲击”，如果 $\tilde{f}_{(h)}$ 使得 $\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}}_{(h)}$ 等于 $\boldsymbol{u}_h$

其中：$\lambda_h \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}_h$，　　$\lambda_h \boldsymbol{v}'_h = \boldsymbol{v}'_h \boldsymbol{P}$. 即影响矩阵 $\boldsymbol{P}$ 右特征向量为 $\boldsymbol{u}$，左特征向量为 $\boldsymbol{v}$。

因为特征冲击向量构成了对应高维空间的一组基，任何的经济冲击均可以表示为特征冲击的线性组合，即：

$$\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}} = \sum_{i=1}^{2N} a_i \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}}_{(i)}$$

带入转移路径表达式，我们得到了由特征值、特征向量以及线性组合系数 $\boldsymbol{a}$ 确定的表达式：

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_t = \sum_{s=0}^{t-1} \boldsymbol{P}^s \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}} = \sum_{h=1}^{2N} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{v}'_h \boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{f}} = \sum_{h=2}^{2N} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \boldsymbol{u}_h a_h,$$

上式的经济学含义是：任何冲击对转移路径的影响都可以分解为特征冲击对转移路径的影响之和。因为影响矩阵与转移矩阵可以由结构参数以及可观测值 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ 完全确定，所以能确定特征向量与特征冲击，于是文章给出了转移路径的一阶表达式，这样就可以确定经济如何向稳态收敛。

3.3收敛速度

特征冲击是分析任何一个冲击的基础，所以为研究经济冲击对应的稳态收敛速度，需要先考虑单一特征冲击下经济收敛到稳态的速度。对于下标为h的特征冲击，转移路径为：

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_t = \sum_{j=2}^{2N} \frac{1-\lambda_j^t}{1-\lambda_j} \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j' \boldsymbol{u}_h = \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \boldsymbol{u}_h \quad \Longrightarrow \quad \ln \boldsymbol{x}_{t+1} - \ln \boldsymbol{x}_t = \lambda_h^t \boldsymbol{u}_h,$$

其半衰期（与稳态差异减半所需时间）估计式为：

$$t_h^{(1/2)}(\widetilde{f}) = -\left\lceil \frac{\ln 2}{\ln \lambda_h} \right\rceil,$$

通过将经济冲击分解为特征冲击的线性组合，就可以确定任何一个冲击对应的半衰期。为了帮助大家更好的理解如何实现这种分解及其背后的经济学含义，我们先看一个简单的例子。在这个例子中，仅有两个地区，并且它们最初都处于经济稳态上。在 t=1 时期出现了生产力以及公共设施的变化，这种外生的变化被每一个行为人完美的预见。由于外生变量改变，经济会处于向新稳态转移的路径上。

3.4两个地区的例子

分三步进行实证的分解:

(1)根据观测到的 ***S*** **,*T*,*D*, *E***(即进出口结构与人口流动结构矩阵)和结构参数，求出影响矩阵 ***R*** 和转移矩阵 ***P*** 。我们还预见(或观测)到了一个的经济冲击 $\widetilde{f}$ ，经济状态内生变量 ***x*** 可表达为:

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{P}\widetilde{\boldsymbol{x}}_t + \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{f}} \quad \text{for } t \geq 0, \text{with } \widetilde{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{0}.$$

(2)因为只有两个地区，而且我们观测到每个地区进出口结构与人口流动结构，所以 ***P*** 和 ***R*** 都是4 x 4的矩阵，求出对应的4个特征向量，上式可以改写为:

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_t = \sum_{h=1}^{4} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{v}_h' \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{f}},$$

(3)求出每个特征向量对应的“特征冲击”，将经济冲击 $\widetilde{f}$ 改写为特征冲击的线性组合，即:

$$\boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{f}} = \sum_{i=1}^{2N} a_i \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{f}}_{(i)} \quad \text{N=2}$$

在两个地区的例子中，特征向量一定具有如下形式：

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\-1\\\zeta\\-\zeta\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\-1\\-\xi\\\xi\end{bmatrix},$$

对应的特征冲击 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2]$分别为：

[0 0 1 1]’ [1 1 0 0]’ [1 -1 c –c]’ [1 -1 –d d]’

这四个特征冲击具有如下的实际含义：

(1)第一个特征冲击表示两个地区的公共设施面临完全相同的提升，因为对应特征值是0，所以此时经济几乎马上调整至稳态，而且相比初始稳态在人口分布、资本积累上无任何变化。

(2)第二个特征冲击表示两个地区的生产力面临完全相同的提升，这导致两地价格水平同等程度的下降，并且使得两地资本积累发生对称的变化，但两地的人口分布保持不变。

(3)第三个特征冲击表示每个地区的生产力和公共设施面临正相关的变化：即生产力提升一定伴随着公共设施提升，反之二者均下降。对于前者，地区人口与资本积累均上升。

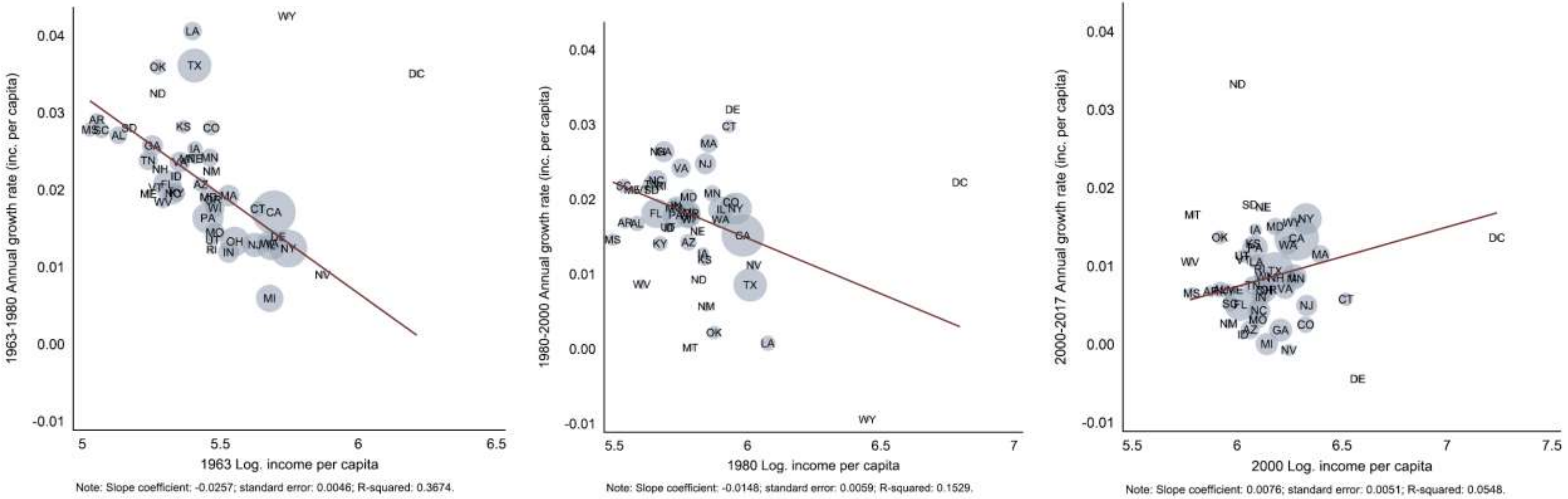
(4)第四个特征冲击表示每个地区的生产力和公共设施面临负相关的变化：即生产力提升伴随着公共设施下降，或生产力下降但公共设施提升。对于前者，地区资本积累上升但人口下降。

通过对半衰期的估计，生产力与公共设施正相关的冲击意味着经济调整至稳态的速度更慢；而生产力与公共设施负相关的冲击意味着经济调整至稳态的速度更快。最后，由于任何一个经济冲击均可以表示为上述四个特征冲击的线性组合，我们就可以分析其对转移路径以及收敛速度的影响。

4.1数据和参数化

- 区域划分（本土48个州+哥伦比亚特区）
  - 锈带州（Rust Belt）
  - 阳光带州（Sun Belt）
  - 其余北方州（Other Northern States）
  - 其余南方州（Other Southern States）
- 参数化
  - $\theta = 5, \beta = (0.95)^5, \psi = 1, \rho = 3\beta, \mu = 0.65, \delta = 1 - 0.95^5$

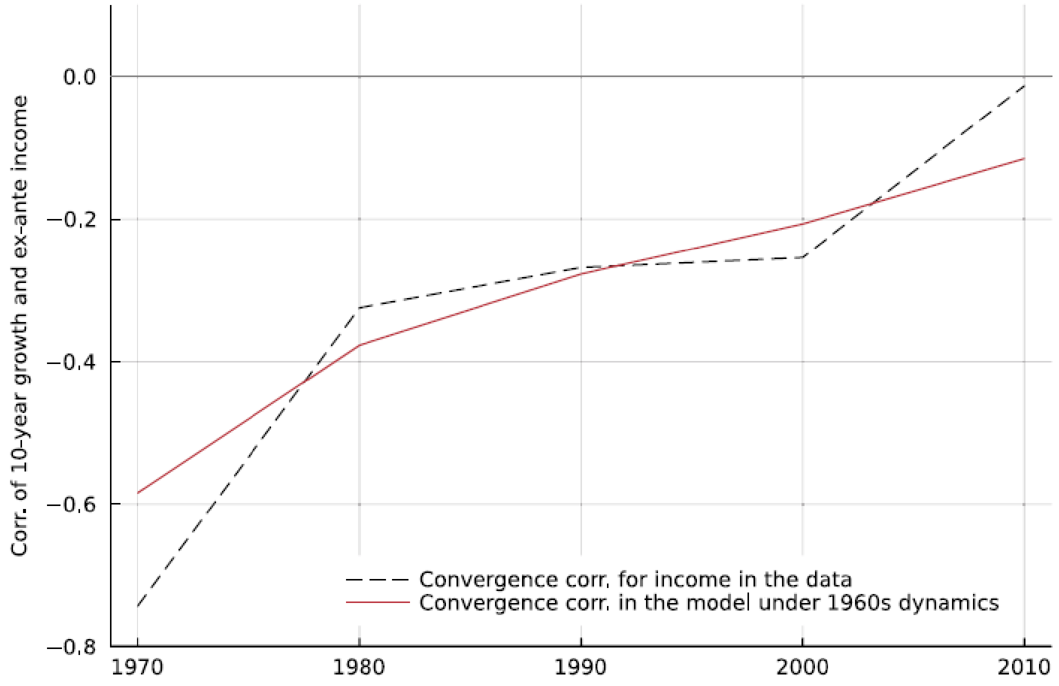
4.2收入收敛情况



人均收入水平（log）与人均收入年度增长率的关系

4.3.1初始条件VS基本面冲击

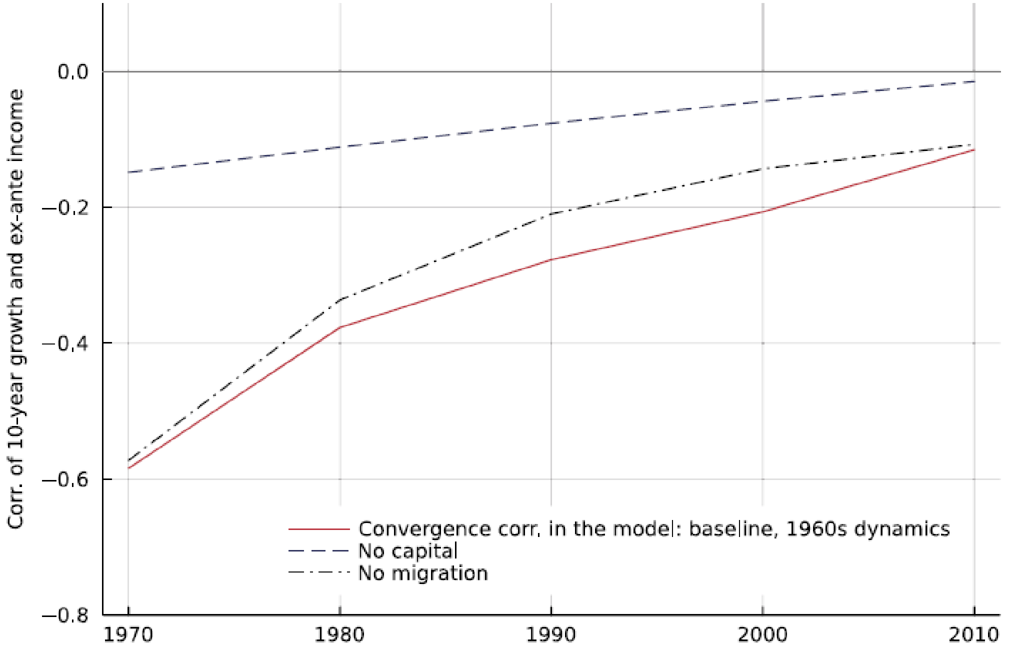
(a) Actual and Counterfactual Convergence



结论：收入趋同的下降主要是由初始条件决定的

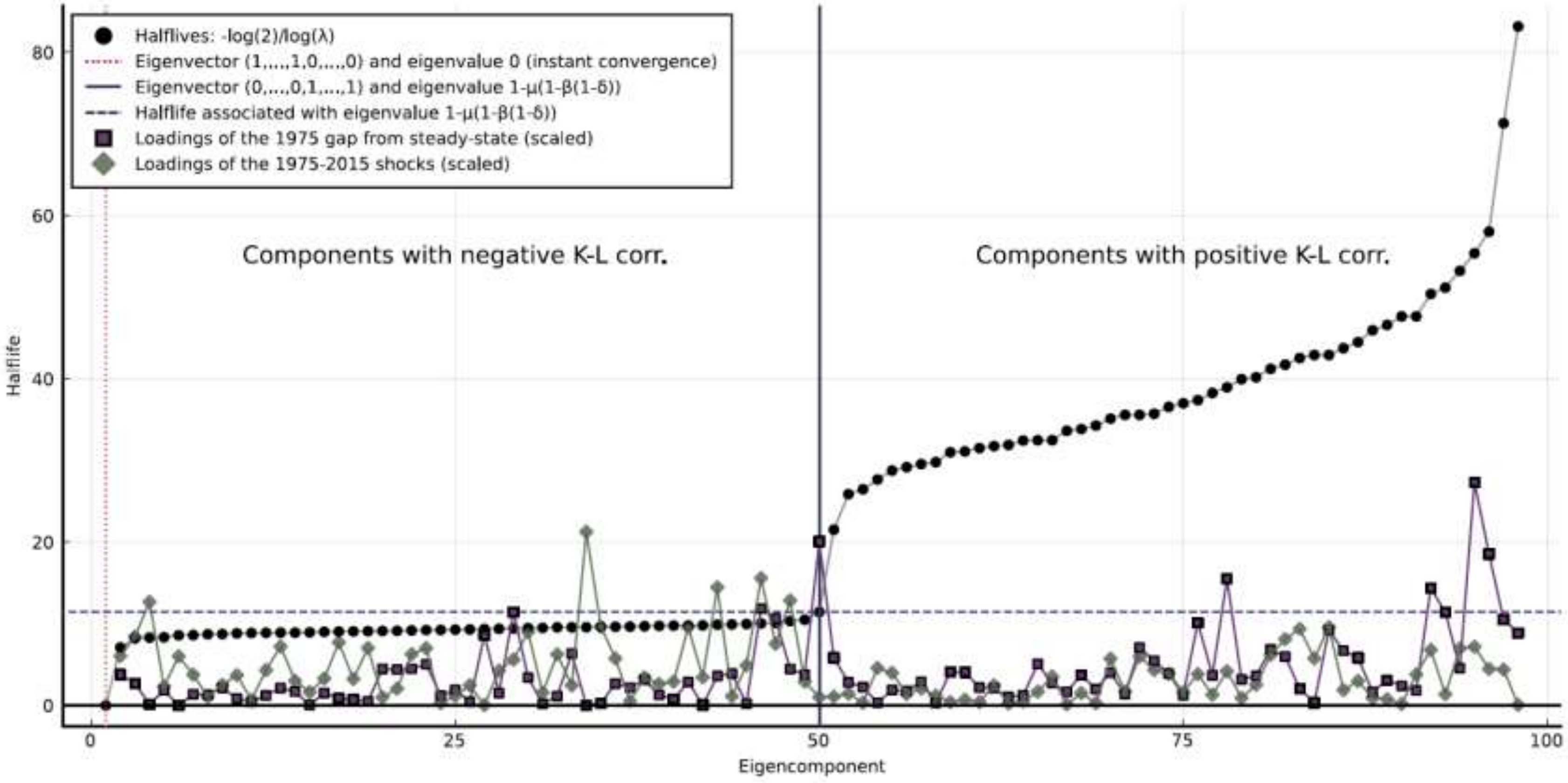
4.3.2资本积累VS人口流动

(b) Counterfactual Convergence (With and Without Investment and Migration)



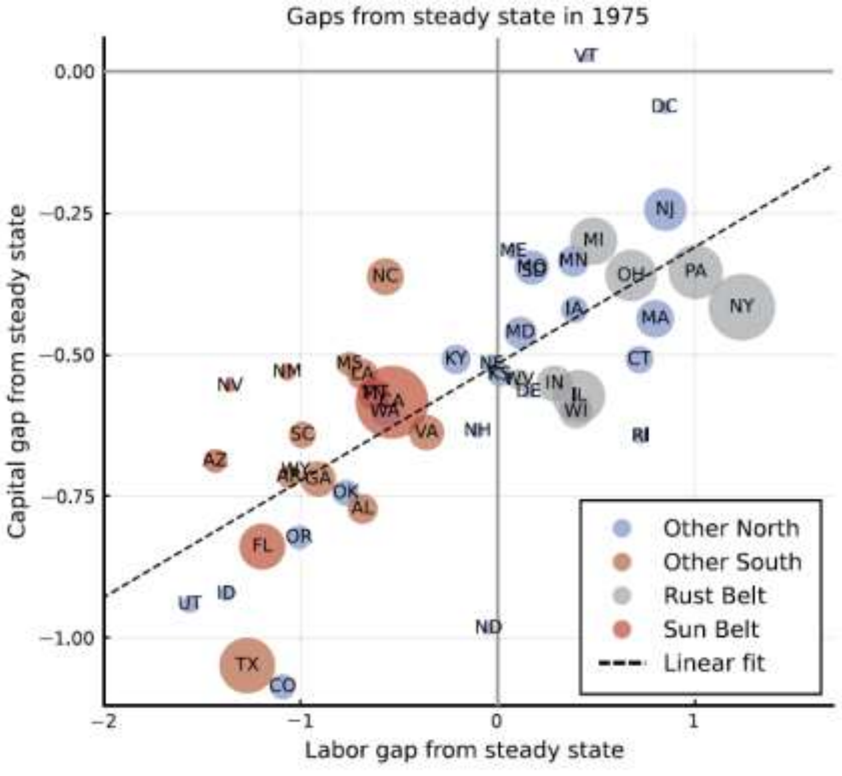
结论：资本和人口对收入趋同下降都有影响，资本积累的影响作用更大。

4.4.1收敛到稳态的速度

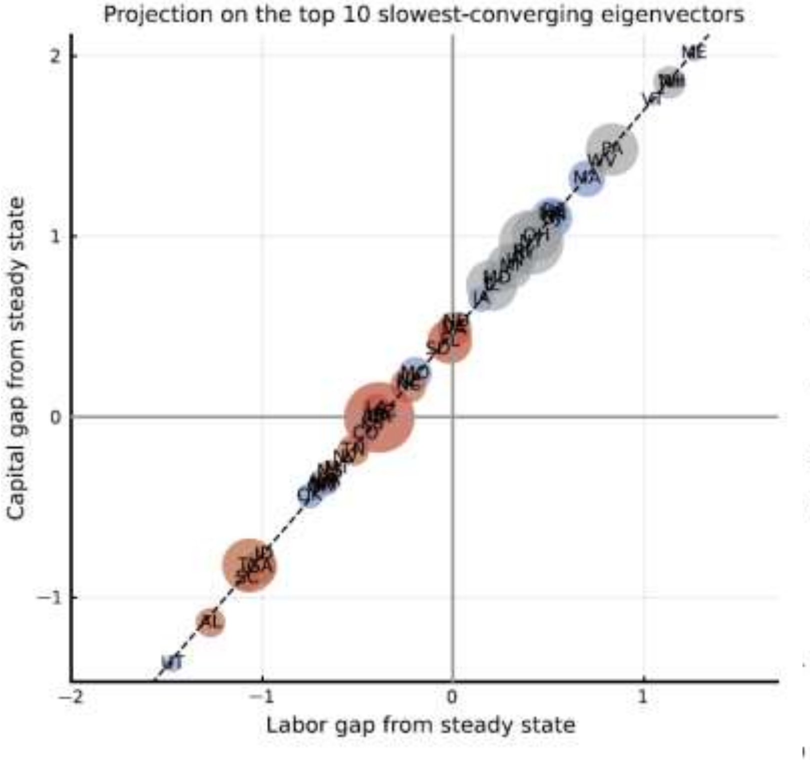


- 收敛到稳态的速度通常较慢，整个特征冲击谱的平均半衰期在20年左右。
- 特征冲击的收敛速度存在很大的异质性，收敛的半衰期从瞬时收敛到80年左右不等。
- 劳动和资本相关系数越大，相应特征冲击收敛到稳态的速度越慢(收敛到稳态的半衰期越长)。

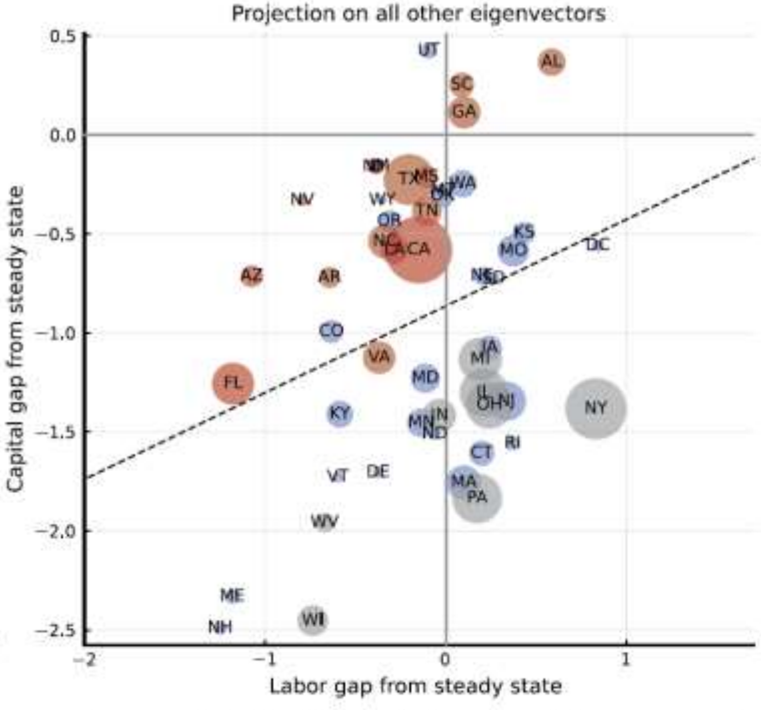
4.4.2初始条件与收敛



Slope coefficient: 0.206; standard error: 0.032; R-squared: 0.471



Slope coefficient: 1.232; standard error: 0.005; R-squared: 0.999



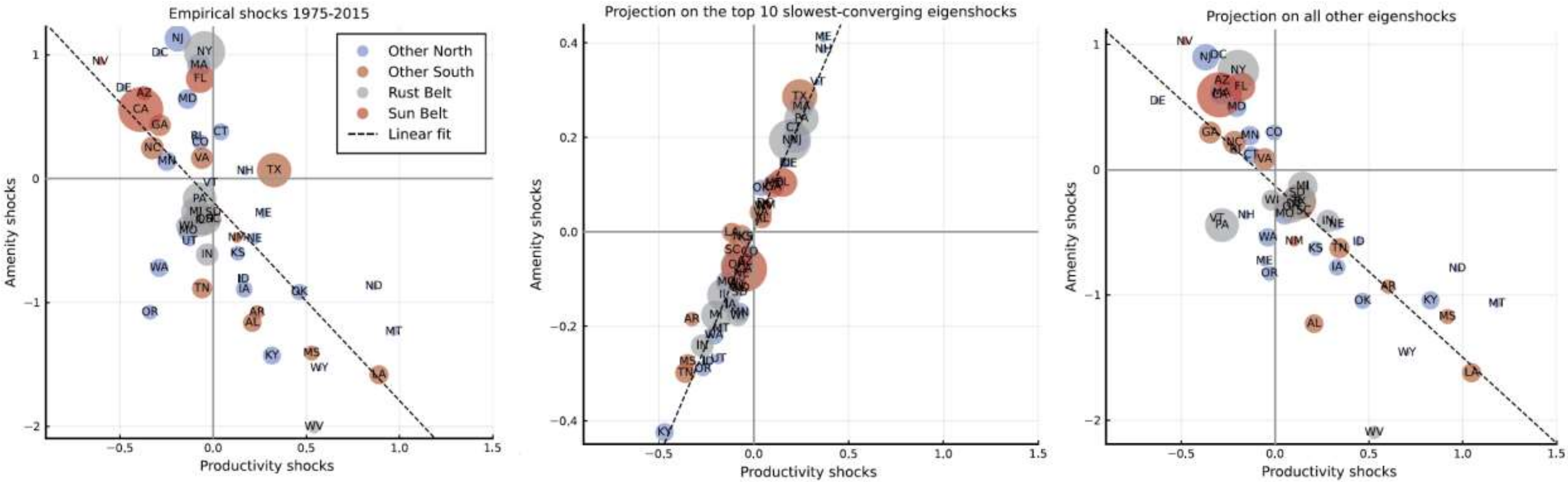
Slope coefficient: 0.438; standard error: 0.207; R-squared: 0.087

- 劳动力缺口和资本缺口总体正相关
- 锈带州整体靠右，人口多于稳态；阳光州整体靠左，人口少于稳态
- 所有州的资本存量都低于稳态，铁锈州的偏离整体上小于阳光州

- 正相关性主要是由收敛速度最慢的10个特征分量驱动的。对于这10个特征分量，正相关性特别强
- 铁锈带州(向右上方)和太阳带州(向左中下方)之间存在明显的差别，地理差别导致了缓慢收敛到稳定状态。

剩余的88个特征分量表现出较弱的正相关性，锈带州和太阳带州之间的地理分离也不那么清晰。

4.4.3基本面冲击



Slope coefficient: -1.604; standard error: 0.24; R-squared: 0.487

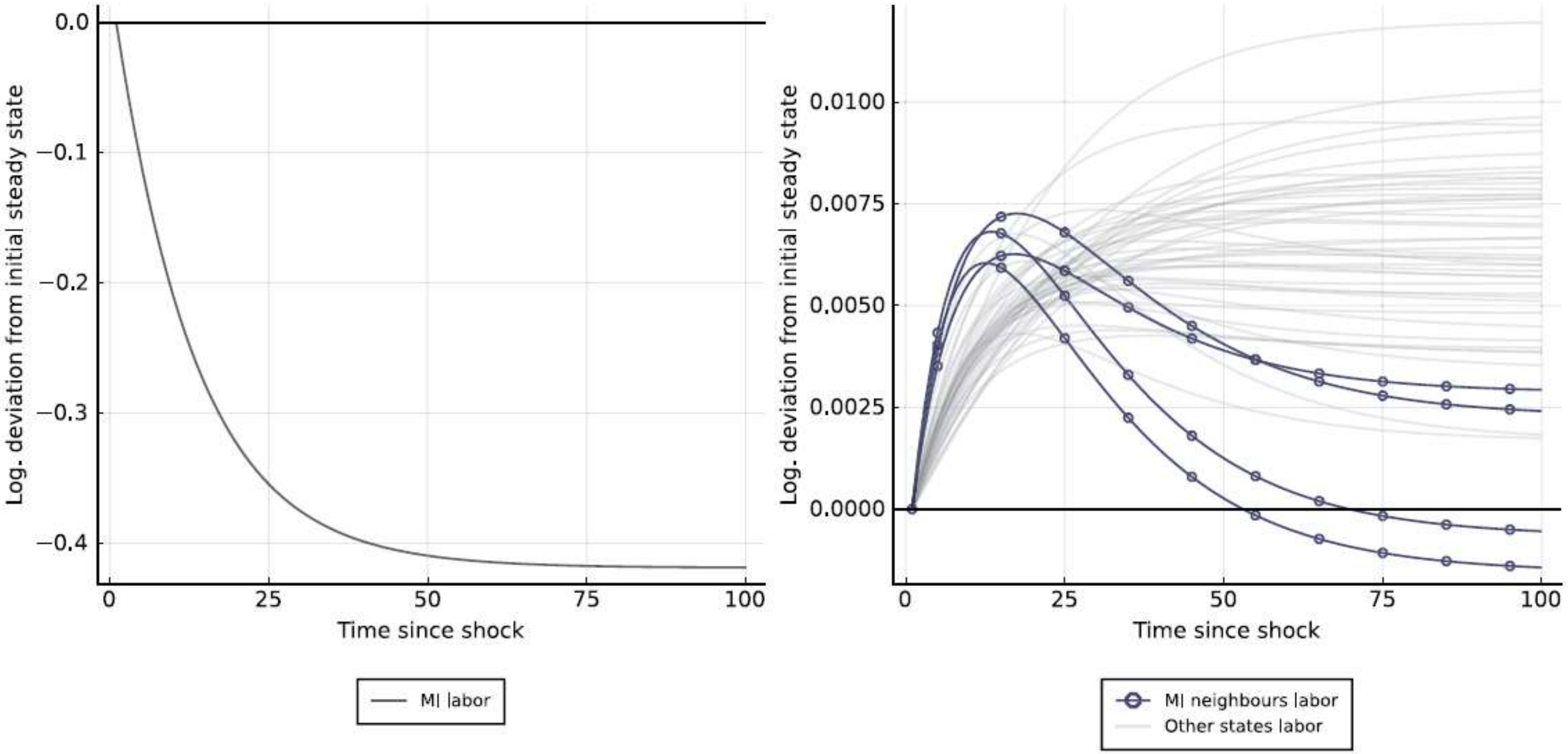
Slope coefficient: 0.954; standard error: 0.035; R-squared: 0.942

Slope coefficient: -1.37; standard error: 0.149; R-squared: 0.643

基本面冲击比初始条件对于收入趋同下降的影响更小，因为基本面冲击更多的权重加在了那些收敛速度更快的特征分量上。

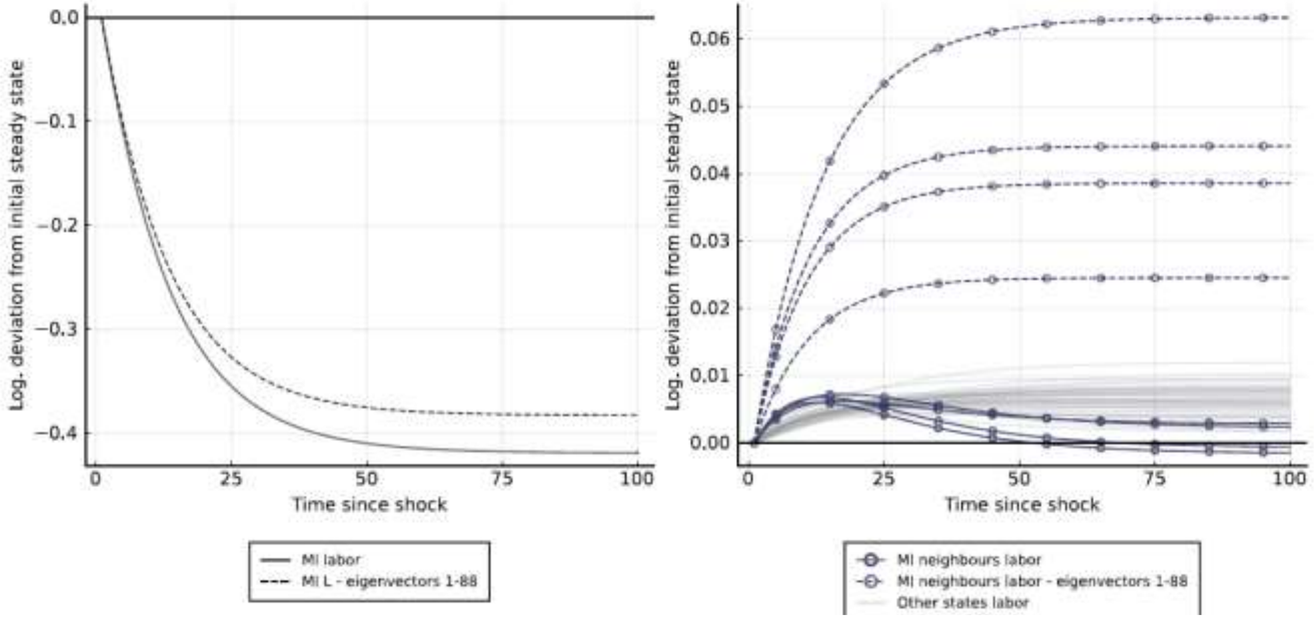
4.4.4密歇根州的例子

(a) Impulse Response of Overall Population Shares

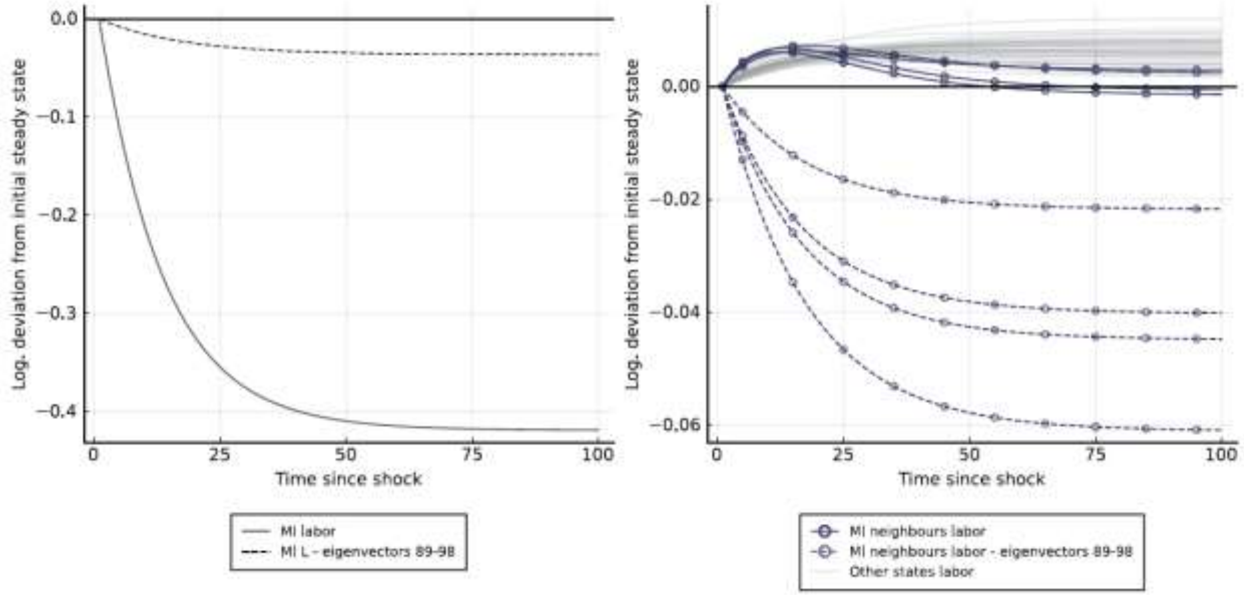


4.4.4密歇根州的例子

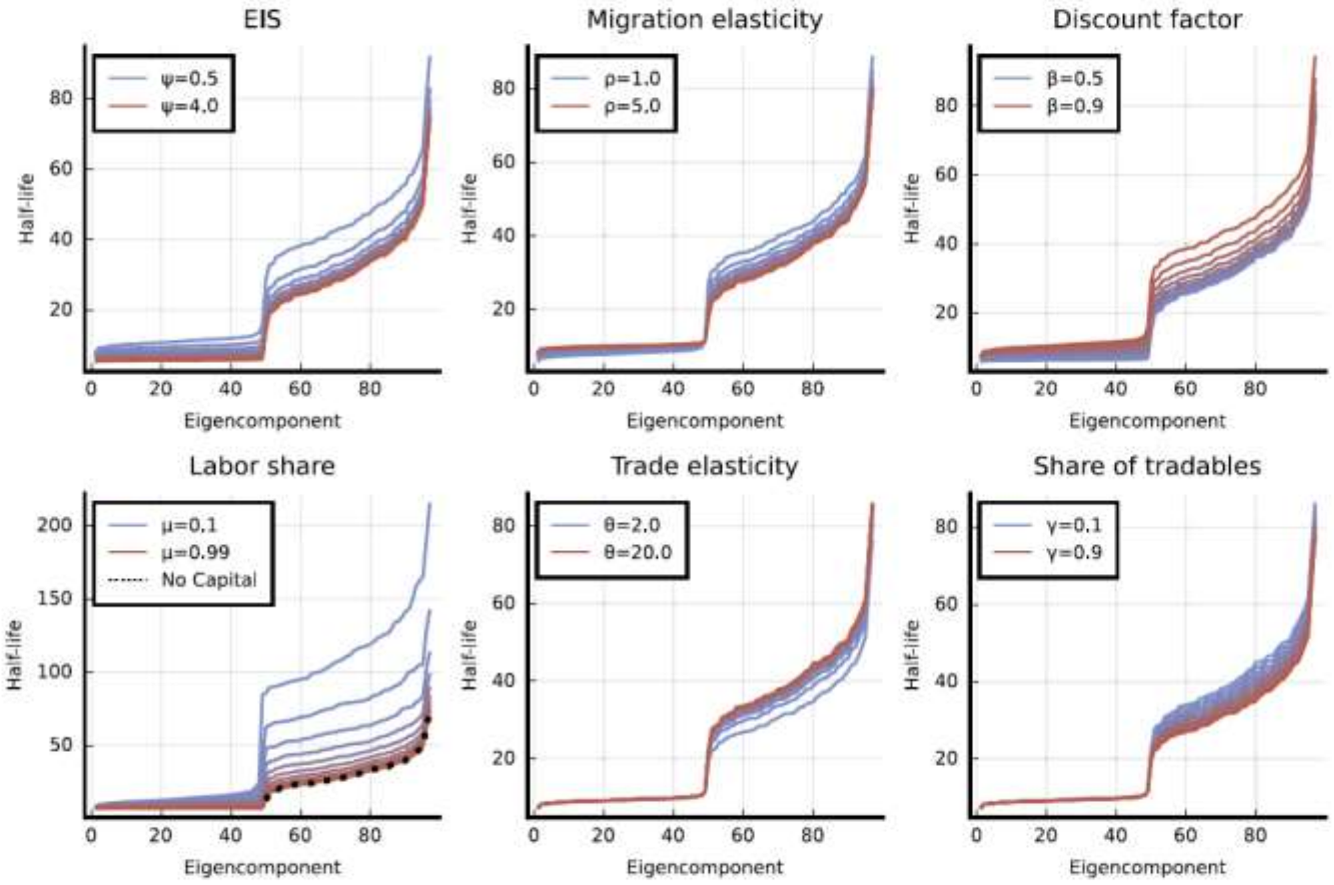
(b) Impulse Response of Population Shares for Eigencomponents 1-88



(c) Impulse Response of Population Shares for Eigencomponents 88-98



4.4.5收敛速度的比较静态分析



5.主要结论

- 状态变量对任何冲击的动态响应可以用转移矩阵的特征向量和特征值来表征。
- 当劳动力和资本与稳态的差距呈正相关时，向稳态的收敛是缓慢的，负相关时则快速。
- 资本积累和迁移动态对于美国各州收入趋同下降以及局部冲击的持续性和异质性影响至关重要。
- 收入趋同下降主要是由初始条件解释的，而不是由对基本面的冲击模式的变化解释的。初始稳态缺口更多地加在缓慢收敛的特征分量上，基本面 冲击更多地加载在快速收敛的特征分量上，即初始条件解释了大部分观测到的收入趋同的下降。
- 在经济体的转移路径上，收敛缓慢和收敛快速的特征分量的重要性不断变化，可能会导致个别地点的状态变量的非单调变动。比如为了应对密歇根州相对生产率下降15%，邻近各州首先经历人口流入，然后再经历人口流出，最终它们在新的稳态中的人口可能会少于初始稳态。