1 Trade Model-Gravity

接下来我们建立一个关于美国进出口的引力模型，模型大致参照参照 Anderson and van Wincoop (2003)，但是嵌套了产地、部门、商品的不同层次。

1.1 US import demand

符号：模型中有部门 sector、商品 product 两个层次，其中商品属于部门。部门表示为 s，每个部门中商品的集合为 G_s，商品表示为 g。国家的编号为 i。在部门层面的消费分为国内国外两块，M_s 是部门 s 的进口量，D_s 是部门 s 的国内供给量。部门下细分的各个商品也可分为国内供给和国外供给，m_g 为商品 g 的进口量，d_g 为商品 g 的国内供给量。其中 m_g 又可继续细分为来自不同国家 i 的商品 g 进口量 m_{ig}。（部分标识与原文有不同，为了方便理解有所改动）

消费者对部门 s 的需求来自进口和国内供给，需求量是 CES 形式：

$$S = \left(A_{D_s}^{\frac{1}{\kappa}} D_s^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + A_{M_s}^{\frac{1}{\kappa}} M_s^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{1}$$

其中对 D_s、M_s 的需求也是 CES 形式：

$$D_s = \left(\sum_{g\in G_s} a_{d_g}^{\frac{1}{\eta}} d_g^{\frac{\eta-1}{\eta}}\right)^{\frac{\eta}{\eta-1}} \tag{2}$$

$$M_s = \left(\sum_{g\in G_s} a_{m_g}^{\frac{1}{\eta}} m_g^{\frac{\eta-1}{\eta}}\right)^{\frac{\eta}{\eta-1}} \tag{3}$$

其中 m_g 又可以继续分为不同国家的进口，其需求也是 CES 形式：

$$m_g = \left(\sum_{i} a_{ig}^{\frac{1}{\sigma}} m_{ig}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{4}$$

我们可以得到本土产品与进口品的替代弹性 κ、各种商品间的替代弹性 η 和不同从国家进口商品的替代弹性 σ

我们应用以下引理：

引理 1：CES 的价格指数（获得一单位效用/消费所需要的支出）

$$\min \sum_i p_i Q_i \qquad s.t. \quad U = \left(\sum_i A_i^{\frac{1}{\alpha}} Q_i^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = 1$$

$$\Longrightarrow \; P = \sum_i p_i Q_i = \left(A_i Q_i^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

于是便可根据公式 1、公式 2、公式 3、公式 4，写出部门、部门本土供给、部门进口、商品进口的价格指数：

$$P_s = \left(A_{D_s} {P_{D_S}}^{1-\kappa} + A_{M_s} {P_{M_s}}^{1-\kappa} \right)^{\frac{1}{1-\kappa}} \tag{5}$$

$$P_{D_s} = \left(\sum_{g \in G_s} a_{d_g} {p_{d_g}}^{1-\eta} \right)^{\frac{1}{1-\eta}} \tag{6}$$

$$P_{M_s} = \left(\sum_{g \in G_s} a_{m_g} {p_{m_g}}^{1-\eta} \right)^{\frac{1}{1-\eta}} \tag{7}$$

$$p_{m_g} = \left(\sum_i a_{ig} {p_{ig}}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{8}$$

可以看出上面的各个价格是层层嵌套的，有了 p_{ig} 便可求出其他价格指数。

接下去我们求需求量:

引理 2：CES 的需求量

$$\max U = \left(\sum_i A_i^{\frac{1}{\alpha}} Q_i^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \qquad s.t. \quad \sum_i p_i Q_i = E\text{（支出）}$$

$$\Longrightarrow \; p_i Q_i = A_i E \frac{p_i^{1-\alpha}}{\sum_i A_i p_i^{1-\alpha}} = A_i E \left(\frac{p_i}{P} \right)^{1-\alpha}$$

则部门 s 的进口 value 为：

$$P_{M_s} M_s = E_s A_{M_s} \left(\frac{P_{M_s}}{P_s} \right)^{1-\kappa} \tag{9}$$

部门 s 中的商品 g 的进口 value 为：

$$p_{m_g} m_g = P_{M_s} M_s \cdot a_{m_g} \left(\frac{p_{m_g}}{P_{M_s}} \right)^{1-\eta} \tag{10}$$

进口商品 g 中从 i 国进口的量：

$$
\begin{aligned}
p_{ig}m_{ig} &= p_{m_g}m_g \cdot a_{ig}\left(\frac{p_{ig}}{p_{m_g}}\right)^{1-\sigma} \\
\Longrightarrow \ m_{ig} &= m_g a_{ig}\left(\frac{p_{ig}}{p_{m_g}}\right)^{-\sigma}
\end{aligned} \tag{11}
$$

为了体现关税在价格决定中的作用，我们令商品 ig 在出口国 i 的价格为 p_{ig}^*，并假定贸易损耗 iceberg effect 全部来自美国的进口关税，记为 τ_{ig}。所以进口价格表示为：

$$
p_{ig} = (1+\tau_{ig})\, p_{ig}^* \tag{12}
$$

以上是关于美国进口需求侧的内容。

1.2 Foreign Export & Import

接下来讲外国的出口供给、进口需求和美国的出口供给。
假定外国的出口供给价格弹性不变：

$$
p_{ig}^* = z_{ig}^* m_{ig}^{\omega^*} \tag{13}
$$

其中 z_{ig}^* 表示边际成本（常数），ω^* 为供给价格弹性的倒数。同样的，我们假设美国的出口供给也是这个形式：

$$
p_{ig} = z_{ig} {m_{ig}^*}^{\omega} \tag{14}
$$

外国的进口需求价格弹性也不变：

$$
x_{ig} = a_{ig}^* \left[\left(1+\tau_{ig}^*\right) p_{ig}^X\right]^{-\sigma^*} \tag{15}
$$

其中 x_{ig} 为美国对国家 i 出口商品 g 的数量，τ_{ig}^* 为 i 国对美国的进口关税，p_{ig}^X 为美国出口品的税前价格，a_{ig}^* 是一个标量。$-\sigma^*$ 即为外国的进口需求价格弹性。

综上，我们建立了关于美国进口需求、出口供给、外国进口需求、出口供给的模型。为了通过这个模型计算贸易战的效果，需要估计模型中的六个参数。

2 估计 $\sigma, \eta, \kappa, \omega^*, \sigma^*, \omega$

2.1 σ, ω^*

这是不同国家产品需求的替代弹性和供给弹性，需求函数式 11、供给函数式 13已知。
改写式 11，两边取对数再做一阶差分

$$\Delta \ln m_{igt} = \Delta \ln m_{gt} + \Delta \ln a_{igt} + \sigma \Delta \ln p_{m_g t} - \sigma \Delta \ln p_{igt}$$

其中 $\Delta \ln m_{gt}$、$\Delta \ln a_{igt}$、$\sigma \Delta \ln p_{m_g t}$ 可以表示为商品-时间的固定效应 η_{gt}^m 和国家-时间 η_{it}^m 的固定效应。为了控制不同部门间的差异，还加入了国家-部门 η_{is}^m 固定效应，则我们可得回归式：

$$\Delta \ln m_{igt} = \eta_{gt}^m + \eta_{it}^m + \eta_{is}^m - \sigma \Delta \ln p_{igt} + \epsilon_{igt}^m \tag{16}$$

用同样的方法改写式 13

$$\Delta \ln p_{igt}^* = \eta_{gt}^{p^*} + \eta_{it}^{p^*} + \eta_{is}^{p^*} + \omega^* \Delta \ln m_{igt} + \epsilon_{igt}^{p^*} \tag{17}$$

使用美国进口关税的变化量 $\Delta \tau_{igt}$ 作为工具变量分别估计式 16和式 17，便可得到 σ, ω^* 的估计值。
为什么用一阶差分：工具变量关税可能会与供给与需求的扰动相关，所用变量使用一阶差分减小了这种相关性。关于工具变量的有效性问题下面还会深入讨论。

2.2 η

改写式 10，取对数再做一阶差分

$$\Delta \ln \frac{p_{m_g t} m_{g_t}}{P_{M_s t} M_{st}} = -(1-\eta) \Delta \ln P_{M_s t} + (1-\eta) \ln p_{m_g t}$$

被解释变量中的 $\frac{p_{m_g t} m_{g_t}}{P_{M_s t} M_{st}}$ 是商品 g 的进口再部门 s 进口中的份额占比。其中 $-(1-\eta) \Delta \ln P_{M_s t}$ 可以表示为部门-时间固定效应 ψ_{st}，则我们可得回归式：

$$\Delta \ln \frac{p_{m_g t} m_{g_t}}{P_{M_s t} M_{st}} = \psi_{st} + (1-\eta) \Delta \ln p_{m_g t} + \epsilon_{m_g t} \tag{18}$$

注意：$p_{m_g t}$ 是商品层面的价格指数，没有直接的数据，要通过式 8计算出来。式 8的参数 σ 已经在上一步中估计出来了，但是参数 a_{ig} 是未知的，因此作

者采用了 Feenstra (1994) 的方法来求：

$$\Delta \ln p_{m_g t} = \frac{1}{1-\sigma} \ln \left(\sum_{i \in C_{gt}} s_{igt} e^{(1-\sigma)\Delta \ln p_{igt} + \Delta \ln a_{igt}} \right) - \frac{1}{1-\sigma} \ln \left(\frac{S_{g,t+1}(C_{gt})}{S_{g,t}(C_{gt})} \right)$$

其中 C_{gt} 是在 t 到 $t+1$ 时间内美国进口商品 ig 的出口国 i 的集合，集合中的国家在 t 时持续不断地向美国出口商品 g。当然还有些国家在 t 时刻向美国出口 g，在 $t+1$ 时刻就不出口，它们不在集合 C_{gt} 中。s_{igt} 表示集合 C_{gt} 中的一个国家 i 的商品 g 对美出口量占 C_{gt} 中所有国家的商品 g 对美出口量的比例。$S_{g,t}(C_g t)$ 是 $i \in C_{gt}$ 的商品 ig 进口量占所有商品 g 进口量的比例。即 $s_{igt} = \frac{p_{igt} m_{igt}}{\sum_{i \in C_{gt}} p_{igt} m_{igt}}$，$S_{g,t}(C_{gt}) = \frac{\sum_{i \in C_{gt}} p_{igt} m_{igt}}{\sum_i p_{igt} m_{igt}}$ 利用这种计算方法，我们把 a_{igt} 给单独提了出来，只需假设效用函数的参数不随时间变化，即 $\Delta \ln a_{igt} = 0$，就可以计算 $\Delta \ln p_{m_g t}$。

与上一部分一样，也采用关税变化作为 IV。我们有国家-商品层面的关税数据 τ_{igt}，怎么构建商品层面的关税变化呢？一种方法是各 $\Delta \tau_{igt}$ 按照进口份额加权求和，但是可能与被解释变量 $\Delta \ln \frac{p_{m_g t} m_{g_t}}{P_{M_s t} M_{st}}$ 有系统性的相关性。所以，作者这里只用了关税变化的简单平均作为 IV：

$$IV = \ln \frac{\sum_{i \in C_{gt}} e^{\Delta \ln(1+\tau_{igt})}}{N_{gt}^C}$$

N_{gt}^C 为集合 C_{gt} 中的元素个数。由此我们就可以进行 IV 估计了。

2.3 κ

κ 的估计方法与 η 相同，只不过是在部门层面。

2.4 σ^*, ω

(σ^*, ω) 的估计方法与 σ, ω^* 相同，只不过供需互换。

综上，我们得到了 $\sigma, \eta, \kappa, \omega^*, \sigma^*, \omega$ 的估计量。

3 General Equilibrium

为了衡量贸易战的影响进行较为精确的估计，作者在此设置了一个一般均衡模型。

3.1 Model Assumptions

在设置模型前，作者对此进行了一些假设：

1. 完全竞争市场；
2. 弹性价格 (不存在粘性价格)；
3. 统一弹性 (即在第二部分中估计的参数)；
4. 劳动收入与利润在本地结算；
5. 短期模型，劳动力不在地区和产业间流动，只有中间品可以流动；
6. 外国工资保持常数；

3.2 Model Setting

美国划分为 R 个地区。每个地区有多个 traded sector(记作 T) 和一个 nontraded sector(记作 NT)。traded sector 在国内地区间自由贸易，但是进出口是有贸易费用的。

一般均衡中一共有三个主体：消费者、生产者、政府。需要满足三个均衡条件：

1. 最优化：在给定的价格因素下，消费者、生产者的效用都是最大化的；
2. 市场出清：每个部门和地区的劳动力市场都出清；国际市场上每个种类商品的进出口都出清；国内的制成品和中间品市场都出清；
3. 满足政府的预算约束。

我们一阶近似对模型从关税战前的初始平衡中产生的变化进行求解。每个市场出清条件都用 log 变化表示。结果取决于内生变量、观察到的初始份额、上面估计出的弹性和关税冲击。

对于任意一个参数 x，我们假设有 $\hat{x} \equiv lnx$。那么我们可以在市场出清条件下，将该系统的解通过以下变量的变化率表示：r 地区 s 部门工资 $\hat{w}_{sr}$, 贸易部门平均工资 $\hat{w}_r^T$, 非贸易部门工资 $\hat{w}_r^{NT}$, 生产者价格指数 $\hat{p}_s$, 中间品价格指数 $\hat{\phi}_s$, 劳动力 $\hat{L}_r^T$, 部门价格 $\hat{P}_s$, 进口价格 $\hat{P}_{Ms}$, 产品价格指数 $\hat{p}_{Mg}$, 进口商品到岸价 $\hat{p}_{ig}$, 关税收入 $\hat{R}$, 部门花销 $\hat{E}_s$, 国家消费者总花费 $\hat{X}$, 国家生产总值增长 $\hat{Y}$，国家中间品花销 $\hat{P_s I_s}$, 国家部门销售量 $p_s\hat{Q}_s$, 地区消费者总花销 $\hat{X}_r$。

下面我们分别对其进行求解。

3.3 Supply Side

研究的参数对象：工资、生产者价格、中间品价格、可贸易部门劳动力。

sector-level 中，对于 r 地区可贸易的 s 部门来说，有类 CES 的生产函数：

$$Q_{sr} = Z_{sr}\left(\frac{I_{sr}}{\alpha_{I,s}}\right)^{\alpha_{I,s}}\left(\frac{L_{sr}}{\alpha_{L,s}}\right)^{\alpha_{L,s}} \tag{19}$$

Z_{sr} 是地区生产力，I_{sr} 是中间品数量，L_{sr} 是劳动力数量，α 是生产份额。我们在此假设部门间的中间品也通过 CD 函数得到总花费函数，那么中间品花费就是：

$$\phi_s \propto \prod_{s' \in S} P_{s'}^{\frac{\alpha^{s'}_{s,s}}{\alpha_s}} \tag{20}$$

P 是价格指数，$\alpha_{s'}$ 是中间品 s' 的市场份额。

对于 r 地区的消费者来说，要最大化的总效用就是在各类产品上消费的效用，就有：$\beta_{NT}\ln C_{NT,r} + \sum_{s\in\mathcal{S}}\beta_s \ln C_{sr}$，$\beta$ 是权重。市场出清时，消费等于生产。而对于 r 地区的资本所有者来说则要最大化其利润。综合起来，用他在一个部门得到的收入，减去算上价格指数乘上数量得到的成本，得到：

$$\Pi_{sr} = \max_{Q_{sr}} p_s Q_{sr} - (1-\alpha_{K,s})\left(\frac{\phi_s^{\alpha_{I,s}} w_{sr}^{\alpha_{L,s}}}{Z_{sr}} Q_{sr}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_{K,s}}} \tag{21}$$

$$p_s - Q_{sr}^{\frac{\alpha_{K,s}}{1-\alpha_{K,s}}}\left(\frac{\phi_s^{\alpha_{I,s}} w_{sr}^{\alpha_{L,s}}}{Z_{sr}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_{K,s}}} = 0 \tag{22}$$

通过一阶条件和 Q 的定义式 (19), 以及出清条件的产出等于消费 ($C_{sr} = Q_{sr}$)，求解出每个地区各部门的工资水平：

$$w_{sr} = \left(\frac{Z_{sr} p_s}{(L_{sr}/\alpha_{L,s})^{\alpha_{K,s}}\ \phi_s^{\alpha_{I,s}}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_{I,s}}} \tag{23}$$

将其分别在可贸易和不可贸易部门结合起来，得到地区工资

$$w_{T,r} = \frac{\sum_{s\in\mathcal{S}} w_{sr} L_{sr}}{\sum_{s\in\mathcal{S}} L_{sr}}$$

$$w_{NT,r} = \beta_{NT} \frac{X_r}{L_{NT,r}}$$

而将产量合起来则有：$Q_s = \sum_{r \in \mathcal{R}} Q_{sr}$。对于不可贸易部分的产量，则直接用生产水平和劳动力数量相乘得到 $Q_{NT,r} = Z_{NT,r} L_{NT,r}$

而在价格层面，用 χ^I 表示劳动力是否能在部门间转移。如此，我们可以将工资表达式写为：

$\hat{w_{sr}} = \frac{\chi^I}{1-\alpha_{l_d}} \left(\hat{p}_s - \alpha_{I,s} \hat{\phi}_s \right) + \left(1 - \chi^I \right) w_{\hat{T},r}$

将其整合起来，在可贸易部门和不可贸易部门分别有：

$w_{\hat{T},r} = \left(1 - \chi^I\right) \frac{\sum_{s \in \mathcal{S}} \left(\frac{w_{sr} L_{sr}}{w_{T,r} L_r^T} \right) \frac{\hat{p}_s - \alpha_{I,s} \hat{\phi}_s}{\alpha_{K,s}} - \hat{L}_r^T}{\sum_{s \in \mathcal{S}} \left(\frac{w_{sr} L_{sr}}{w_{T,r} L_r^T} \right) \frac{1-\alpha_{I,s}}{\alpha_{K,s}}} + \chi^I \sum_{s \in \mathcal{S}} \left(\frac{w_{sr} L_{sr}}{w_{T,r} L_r^T} \right) \frac{\hat{p}_s - \alpha_{I,s} \hat{\phi}_s}{1-\alpha_{I,s}}$

$w_{\hat{N}T,r} = \chi^I \hat{X}_r + \left(1 - \chi^I\right) w_{\hat{T},r}$

而可贸易部门的劳动力变化可以表示为: $\hat{L}_r^T = \left(1 - \chi^\mathrm{I}\right) \left(w_{\hat{T},r} - \hat{X}_r \right) \frac{L_r^{NT}}{L_r^T}$

根据计算出的数量、价格等因素，可以将部门 s 的制造者价格指数 $\hat{p}_s$ 表示为:

$$\frac{\frac{P_{D \cdot s} D_s}{p_s Q_s} \left(\hat{E}_s + (\kappa - 1) \hat{P}_s \right) + \frac{\alpha_{I,s}}{\alpha_{K,s}} \hat{\phi}_s + \sum_{r \in \mathcal{R}} \frac{p_s Q_{sr}}{p_s Q_s} \frac{\alpha_{L,s}}{\alpha_{K,s}} \hat{w_{sr}}}{\frac{1-\alpha_{K,s}}{\alpha_{K,s}} + \frac{P_{D_s} D_s}{p_s Q_s} \kappa + \left(1 - \frac{P_{D_s} D_s}{p_s Q_s} \right) \sigma^*} \tag{24}$$

$$- \frac{\sigma^* \sum_{g \in G_s} \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{p_{Dg} x_{ig}}{p_s Q_s} \frac{d\tau_{ig}^*}{1+\tau_{ig}^*}}{\frac{1-\alpha_{K,s}}{\alpha_{K,s}} + \frac{P_{D_s} D_s}{p_s Q_s} \kappa + \left(1 - \frac{P_{D_s} D_s}{p_s Q_s} \right) \sigma^*} \tag{25}$$

(24) 的分子包含了中间品、工资和部门总花费,(25) 的分子包括了产品层面的总收入。加权之后得到生产者价格指数。(这里实际上还可以写作部门国内花费变化率、关税冲击和消费冲击的总影响，具体展开方式见原文附录)

带入 (20)，算出中间品价格指数：

:

$$\hat{\phi}_s = \sum_{s' \in \mathcal{S}} \frac{\alpha_s^{s'}}{\alpha_{I,s}} \hat{P}_{s'}$$

3.4 Demand Side

研究的参数对象：消费者价格指数、进口价格指数、关税收益。

在产品层面的话，假设按部门和区域划分的生产，以不变的边际转化率在产品之间进行分配。那么 q_g 表示国家队产品 g 的产出的话，就有：$\sum_{g\in\mathcal{G}_s}\frac{q_g}{z_g}=Q_s$

z_g 是产品层面生产的 shock。基于其我们可以通过部门的价格指数直接表示出商品的价格指数，就有 $p_{Dg}=\frac{p_s}{z_g}$, 这是美国国内生产的 g 产品的价格，再加上冰山成本 δ_{ig}, 这样我们可以算出 product-level 的一个市场出清条件，

$$q_g=\underbrace{(a_{Dg}D_s)\left(\frac{p_{Dg}}{P_{Ds}}\right)^{-\eta}}_{d_g}+\sum_{i\in\mathcal{I}}\delta_{ig}\underbrace{a^*_{ig}\left(\left(1+\tau^*_{ig}\right)p^X_{ig}\right)^{-\sigma^*}}_{x_{ig}}$$

这里的 dg 是一个 CES 结构的 g 产品的国内需求，xig 则是对产品 g 外国进口的需求。右边表现了国内市场对某商品的需求，左边则是供给。

在计算出产品层面的数量后，算出关税收入：根据在前面对弹性推导部分的定义，我们可以得到部门 s 的价格指数、s 进口部分价格指数和产品层面的价格指数，分别为：

$$\hat{P}_s=\frac{P_{Ds}D_s}{E_s}\hat{p}_s+\left(1-\frac{P_{Ds}D_s}{E_s}\right)\hat{P}_{Ms}$$

$$\hat{P_{Ms}}=\sum_{g\in\mathcal{G}_s}\left(\frac{p_{Mg}m_g}{P_{Ms}M_s}\right)p\hat{M}_g$$

$$p\hat{_{Mg}}=\sum_{i\in\mathcal{I}}\left(\frac{p_{ig}m_{ig}}{p_{Mg}m_g}\right)\hat{p}_{ig}$$

由此我们可以推出到岸价格的变化是三者变化的累加，将 $\hat{p_{ig}}$ 表示为:

$$\frac{\omega^*}{1+\omega^*\sigma}\left(\hat{E}_s+(\kappa-1)\hat{P}_s+(\eta-\kappa)\hat{P}_{Ms}+(\sigma-\eta)\hat{p}_{Mg}\right)+\frac{1}{1+\omega^*\sigma}\frac{d\tau_{ig}}{1+\tau_{ig}} \tag{26}$$

很自然的,我们用关税率乘上产品价值 $R=\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{g\in\mathcal{G}_s}\sum_{i\in\mathcal{I}}\tau_{ig}p^*_{ig}m_{ig}$ 定义关税收入，而由于其距 0 较远，对其变化可以用二阶展开估计，带入我们在进出口需求部分定义的商品数量 $m_{ig}=m_g a_{ig}\left(\frac{p_{ig}}{p_{Mg}}\right)^{-\sigma}$ 和商品价格指数 $p^*_{ig}=z^*_{ig}m^{\omega^*}_{ig}$ 则能估计出关税收入的变化率 $\hat{R}$:

$$\sum_s \sum_{g\in G_s} \sum_i (\tau_{gi} + d\tau_{gi}) \frac{p^*_{gi} m_{gi}}{R} \frac{1+\omega^*}{1+\omega^*\sigma} \left(\hat{E}_s + (\kappa-1)\hat{P}_s + (\eta-\kappa)\hat{P}_{Ms} + (\sigma-\eta)\hat{p}_{gM}\right) \tag{27}$$

$$+ \sum_s \sum_{g\in G_s} \sum_i \left(1 - \tau_{ig}\frac{\sigma-1}{1+\omega^*\sigma}\right) \frac{p^*_{ig} m_{ig}}{R} \frac{d\tau_{ig}}{1+\tau_{ig}} \tag{28}$$

$$- \sum_s \sum_{g\in G_s} \sum_i \frac{p^*_{ig} m_{ig}}{R} \sigma \frac{1+\omega^*}{1+\omega^*\sigma} \left(\frac{d\tau_{ig}}{1+\tau_{ig}}\right)^2 \tag{29}$$

3.5 Sector and regional effects

对于 sector level 的开销，由于部门总开销等于进口开销加上本地消费开销 $E_s = P_s C_s + P_s I_s$，可以将它的变化率用一阶差分表示为:

$\hat{E}_s \equiv \frac{P_s C_s}{E_s}\hat{X} + \left(1 - \frac{P_s C_s}{E_s}\right)\hat{P_s I_s}$

根据出清条件，国家的消费者收入的变化情况则是国民净收入和关税收入变化率之和:

$\hat{X} = \frac{Y}{X}\hat{Y} + \frac{R}{X}\hat{R}$

国民收入的变化情况表示为在 nontraded sector 和 traded sector 在各个地区的收入变化之和:

$\hat{Y} = \sum_{r\in\mathcal{R}} \left(\frac{P_{NT,r} Q_{NT,r}}{Y}\right)\hat{X}_r + \sum_{s\in\mathcal{S}} (1-\alpha_{I,s}) \left(\frac{p_s Q_s}{Y}\right) \sum_{r\in\mathcal{R}} \left(\frac{p_s Q_{sr}}{p_s Q_s}\right) \left(\hat{p}_s + \hat{Q}_{sr}\right)$

其中中间部门的花费增长率可以拆开表示为各个商品价格增长率以及数量增长率的加权:

$\widehat{P_s I_s} = \sum_{s'\in\mathcal{S}} \alpha^s_{s'} \sum_{r\in\mathcal{R}} \frac{p_{s'} Q_{s'r}}{P_s I_s} (\hat{p_{s'}} + \widehat{Q_{s'r}})$

而一阶差分情况下，对于生产者来说有部门的价格和数量增长率之和等于价格指数变化率减去中间品价格变化率和工资的增长率，就有：

$\hat{p_s} + \widehat{Q_{sr}} = \frac{1}{\alpha_{K,s}}\hat{p_s} - \frac{\alpha_{I,s}}{\alpha_{K,s}}\hat{\phi}_s - \frac{\alpha_{L,s}}{\alpha_{K,s}}\hat{w_{sr}}$

综合以上信息，得到地区消费者花费变化率 $\hat{X}_r$ 为：

$$\frac{\sum_{s\in\mathcal{S}} \frac{p_{sr} Q_{sr}}{X_r} (1-\alpha_{I,s}) \left(\hat{p}_s + \hat{Q}_{sr}\right) + \frac{b_r R}{X_r}\hat{R}}{1 - \frac{P_{NT,r} Q_{NT,r}}{X_r}} \tag{30}$$

参考文献

James E. Anderson and Eric van Wincoop. Gravity with gravitas: A solution to the border puzzle. *The American Economic Review*, 93(1): 170–192, 2003. ISSN 00028282. URL `www.jstor.org/stable/3132167`.

Robert C Feenstra. New product varieties and the measurement of international prices. *The American Economic Review*, pages 157–177, 1994.