第四讲 最优化问题基础与应用

樊潇彦

复旦大学经济学院

本讲主要内容

最优化问题的分析框架

1. 理解复杂的经济现象背后核心的经济机制和经济逻辑。
2. 把所要研究的经济问题描述为最优化问题（optimization problem）：

$$\underset{x\in X}{Max}\ \ U(x,z;\theta)$$
$$s.t.\ \ G(x,z;\theta)=0$$

其中：$Z\subseteq\mathbb{R}^M$ 为 M 维外生变量空间，$\Theta\subseteq\mathbb{R}^K$ 为 K 维参数空间，$X\subseteq\mathbb{R}^N$ 为 N 维内生变量空间。

3. 寻找最优解 $f:Z\times\Theta\to X$ 并分析其性质：

$$x^*=f(z;\theta)=\underset{x\in X}{argmax}\ \ F(x,z;\theta)$$

重要概念

- 外生变量vs.内生变量
  - 外生变量是经济主体不可控制的外部因素所决定的变量，如降雨量、种子和化肥的价格对单个农户而言是一种“客观条件”，无法改变；
  - 内生变量则是经济主体的“自主选择”，如农民会选择怎样的种植技术、会自发产生怎样的经济组织等，是经济模型分析的核心。
- 定义方程vs.行为方程
  - 定义方程是表述变量关系的恒等式，如预算约束条件、GDP核算公式等；
  - 行为方程表明外生变量（及参数）对内生变量的作用方式。

问题分类

- 静态vs.动态
  - 静态问题的解对应 $f(z;\theta)$ 不随时间发生变化；
  - 动态问题的解对应 $f(z,t;\theta)$ 则是时间 t 的函数。
- 确定性vs.不确定性
  - 确定性问题：外生变量中不包括随机冲击，目标函数为 u、π等。
  - 不确定性问题：外生变量中包括随机冲击，目标函数为期望值，如 $E(u)$、$E(\pi)$ 等。

问题分类

- 非策略性vs.策略性
  - 非策略性问题：每个行为人的决策不受其他行为人的影响，目标和约束函数中不包含其他行为人的决策变量，如 $\pi_i(q_i)$。
  - 策略性问题：每个行为人的决策受到其他行为人决策的影响，目标和约束函数中包含其他行为人的决策变量，如 $\pi_i(q_i, q_j)$。
- 线性规划vs.非线性规划
  - 线性规划：目标函数和约束条件均为决策变量的线性函数。
  - 非线性规划：目标函数或约束条件为决策变量的非线性函数。

历史背景

- 20世纪30年代末，前苏联数学家康托洛维奇（L. Kantorovich）首先提出了用线性规划模型解决有限资源最优分配问题；
- 1947年美国人丹齐格提出线性规划的单纯形算法；
- 20世纪50年代美国经济学家库普曼斯（T.J. Koopmans）成功地将它用于分析资源配置与价格体系的关系；
- 1975年康托洛维奇和库普曼斯分享诺贝尔经济学奖。

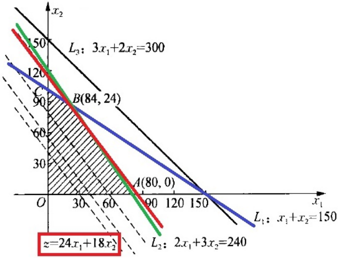
例1：生产计划

- 经济问题：

原料（吨） 产品	甲	乙	每周资源总量
A	1	1	150
B	2	3	240
C	3	2	300
收益（千元/吨）	24	18	/

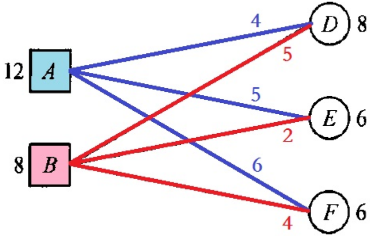
- 数学描述：

$$
\begin{aligned}
\max\ \pi &= 24x_1 + 18x_2 \\
s.t.\ x_1 + x_2 &\le 150 \\
2x_1 + 3x_2 &\le 240 \\
3x_1 + 2x_2 &\le 300 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$



例2：运输问题

需要从左侧2个仓库将货物运往右侧的3个工厂，仓储量、单位运费和需求量如下图所示：



$$
\begin{aligned}
\min\ c = & 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} \\
& + 5x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} \\
s.t.\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 12 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 8 \\
& x_{11} + x_{21} \geq 8 \\
& x_{12} + x_{22} \geq 6 \\
& x_{13} + x_{23} \geq 6 \\
& x_{ij} \geq 0\ \ (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

线性规划问题小结

- 建模步骤：
  1. 理解要解决的问题，确定目标函数；
  2. 定义决策变量；
  3. 用等式或不等式写出约束条件；
  4. 判定解的存在性和唯一性，求解。
- 求解定理：

  若线性规划问题有有限的最优值，它必在可行域的某个顶（极）点达到。

非线性规划问题分类

- 按决策变量个数分：
  - 一元：$x \in \mathbb{R}$
  - 多元：$x = (x_1, x_2 ... x_N) \in \mathbb{R}^N$
- 按约束条件分：
  - 无约束条件
  - 有等式约束
  - 有不等式约束

一元无约束最优化问题的求解条件

假定目标函数 $u(x)$ 对决策变量 x 二阶可微，且 $u'>0,\ u''<0$。求解 $\underset{x}{Max}\ u(x)$ 问题，我们对 $u(x)$ 在 x^* 附近做二阶泰勒展开：

$$u(x)=u(x^*)+u'(x^*)(x-x^*)+\frac{u''(x^*)(x-x^*)^2}{2}+o\left((x-x^*)^2\right)$$

x^* 为最优解，即 $u(x)\le u(x^*)$，且为内点解的必要条件为：

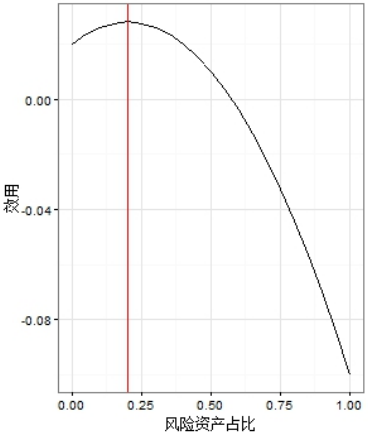
- 一阶条件（FOC）：$u'(x^*)=0$
- 二阶条件（SOC）：$u''(x^*)\le 0$。当效用函数拟凹时二阶条件满足。

例1：最优投资组合

- 经济问题：如果知道无风险资产的收益率 r_f、风险资产的收益率和方差 μ, σ^2，以及效用函数的形式和参数，那么风险资产在个人总资产中应占有多大比例？
- 数学描述：

$$\underset{\theta}{Max}\, U = \theta\mu + (1-\theta)r_f - \frac{1}{2}A\theta^2\sigma^2$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\mu - r_f}{A\sigma^2}$$



多元无约束最优化问题的求解定理

当 x 为 N 维向量时，同样假定 $u(x)$ 二阶可微，记（其中 $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$，$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$，$u_{ii} \leq 0$）：

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad D^2 u = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix}$$

x^* 为内点最优解的必要条件为：

- 一阶条件（FOC）：$\nabla u(x^*) = 0$
- 二阶条件（SOC）：海赛矩阵 $D^2 u(x^*)$ 半负定。当效用函数拟凹时二阶条件满足。

有等式约束最优化问题的求解定理

假定共有 M 个等式约束，构成约束集 $G=\left\{g^m(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^N,\ m=1,2\ldots M\right\}$，函数 g^m 二次可微。此时UMP问题可表述为：

$$
\begin{aligned}
&\underset{x}{Max}\ \ u(x)\\
&s.t.\ g^1(x)=0\\
&\qquad\quad\vdots\\
&\qquad g^M(x)=0
\end{aligned}
$$

写出拉格朗日函数 $\underset{x}{Max}\, L(x)=u(x)-\sum\limits_m \lambda_m g^m(x)$，转化为无约束的最优化问题，$x^*$ 为内点最优解的必要条件为：

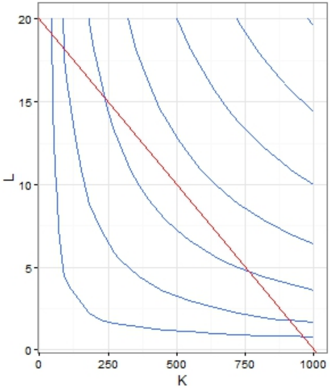
- 一阶条件：$\nabla L(x^*)=0 \Leftrightarrow \nabla u(x^*)=\sum\limits_m \lambda_m \nabla g^m(x^*)$，即目标函数的梯度是约束函数梯度的线性组合；
- 二阶条件：加边海赛矩阵 $D_x^2 L(x^*,\lambda)$ 半负定。根据 MWG（2001）定理M.D.3，效用函数的拟凹性质保证二阶条件满足。

例2：企业最优化问题

- 经济问题：已知企业的利润函数和总成本，问企业应使用多少资本、雇佣多少工人？
- 数学描述：

$$\underset{K,L}{Max}\, Y = (KL)^{0.5}$$
$$s.t.\ 0.1K + 5L = 100$$

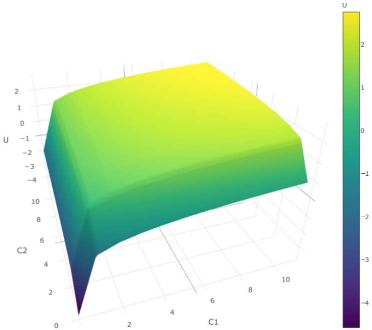
$$\Rightarrow K = 500,\quad L = 10$$



例3：消费者最优问题（UMP）

- 经济问题：已知某人的可支配收入 w、两种商品的价格 p_1, p_2 和效用函数，问每种商品应该消费多少单位？
- 数学描述：个人最优决策

$$\max_{c_1, c_2} \; u(c_1, c_2) = \alpha \ln c_1 + (1-\alpha) \ln c_2$$
$$s.t. \quad G(c_1, c_2) = w - p_1 c_1 - p_2 c_2 = 0$$



例3：消费者最优问题（UMP）

- 上述最优化问题等同于求拉格朗日方程的最大值：

$$\underset{c_1,c_2}{Max}\,\mathcal{L}=\alpha\ln c_1+(1-\alpha)\ln c_2+\lambda\left(w-p_1c_1-p_2c_2\right)$$

由一阶条件：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_1}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_2}=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\alpha}{c_1}=\lambda p_1\\ \frac{1-\alpha}{c_2}=\lambda p_2\end{array}\right.\Rightarrow\frac{p_2c_2}{p_1c_1}=\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

代入预算约束方程 $p_1c_1+p_2c_2=w$ 可以得到：

$$c_1=\frac{\alpha w}{p_1},\quad c_2=\frac{(1-\alpha)\,w}{p_2}$$

- 经济含义：对商品 $i=1,2$ 的消费需求 c_i 与价格 p_i 成反比，与可支配收入 w 成正比，每种商品的支出 p_ic_i 占可支配收入的比例为常数。

练习1：消费与产业结构变迁

假定消费者面临下面的最优化问题（$\underline{c} > 0$）：

$$\begin{aligned} &\underset{c_1,c_2}{Max} \;\; u\left(c_1, c_2\right) = \alpha \ln(c_1 - \underline{c}) + (1-\alpha) \ln c_2 \\ &s.t. \quad G\left(c_1, c_2\right) = w - p_1 c_1 - p_2 c_2 = 0 \end{aligned}$$

1. 写出上述问题的解条件方程。
2. 消费者应该如何决策？
3. 如果 $\underline{c}$ 是食品的最低消费，上述选择是否符合恩格尔定律？
4. 你觉得这个模型能否用来预测一个国家经济增长过程中产业结构的变化？

练习2：消费—储蓄决策

在一个两期的OLG（overlapping generation）模型中，假定一生可以分为年轻 y 和年老 o 两期，个人做出消费— 储蓄决策，以最大化一生的总效用：

$$Max\ U = u\left(c^{y}\right) + \beta u\left(c^{o}\right)$$

$$s.t.\ c^{y} + s = w^{y} = 1$$

$$c^{o} = (1 + r)\, s = Rs$$

其中：$\beta \in (0, 1)$ 为时间贴现率，$w^{y} = 1$ 为正规化的年轻时的收入，r 为外生给定的利率水平。请回答以下问题：

1. 写出模型的一阶条件；
2. 假设有CRRA形式的效用函数 $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$，其中相对风险规避系数 $\gamma > 1$。求出 c^{y} 和 s，分析影响储蓄率的因素。

练习3：生产函数与收入分配

给定利率和工资水平 w, r，假定企业的产品价格正规化为 $P=1$，最优化问题为（$\rho<1$，$0<\alpha<1$）：

$$\underset{K,L}{Max}\ \Pi = Y - rK - wL$$
$$s.t.\ Y = A\left[\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)L^{\rho}\right]^{1/\rho}$$

1. 写出以下人均形式的最优化问题的解条件方程（$x=\frac{X}{L}$）：

$$\underset{k}{Max}\ \ \pi = y - rk - w$$
$$s.t.\quad y = A\left[\alpha k^{\rho} + 1 - \alpha\right]^{1/\rho}$$

2. 企业的最优人均资本存量是多少？

练习3：生产函数与收入分配

3. 当 $0<\rho<1$ 时，资本收入占比 $s_K \equiv \frac{rK}{Y} = \frac{rk}{y}$ 会受到哪些因素的影响？
4. 根据下面要素替代弹性的定义（其中 $MP_x \equiv \frac{dY}{dx}$, $(x=K,L)$ 为要素的边际产出）：

$$\sigma \equiv -\frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(\frac{MP_K}{MP_L}\right)}$$

证明对CES生产函数而言，有 $\sigma{=}\frac{1}{1-\rho}$。

5. 解释结果3的经济含义。

练习4：厂商问题

假定生产函数为 $f(x) = 20x - x^2$，产品价格正规化为1，投入品 x 的价格为 w，$x, w > 0$。

1. 写出厂商最优化问题。
2. 如果 $x > 0$，利润最大化的一阶条件是什么？
3. 写出要素需求函数 $x(w)$ 的表达式。
4. 要素价格变动会对要素需求产生什么影响 $\partial x(w) / \partial w = ?$
5. 写出最大化利润的表达式 $\pi^* = \pi(w) = ?$
6. 投入品价格变动对利润产生怎样的影响？

参考资料

1. Z. 博迪、A. 凯恩、A.J. 马库斯等著：《投资学（原书第9版）》，汪昌云、张永冀等译，机械工业出版社，2012
2. A.K.迪克西特著，2006：《经济理论中的最优化方法》，冯曲、吴桂英译，上海人民出版社
3. 谭永基、俞红编著：《现实世界的数学视角与思维》，复旦大学出版社，2010