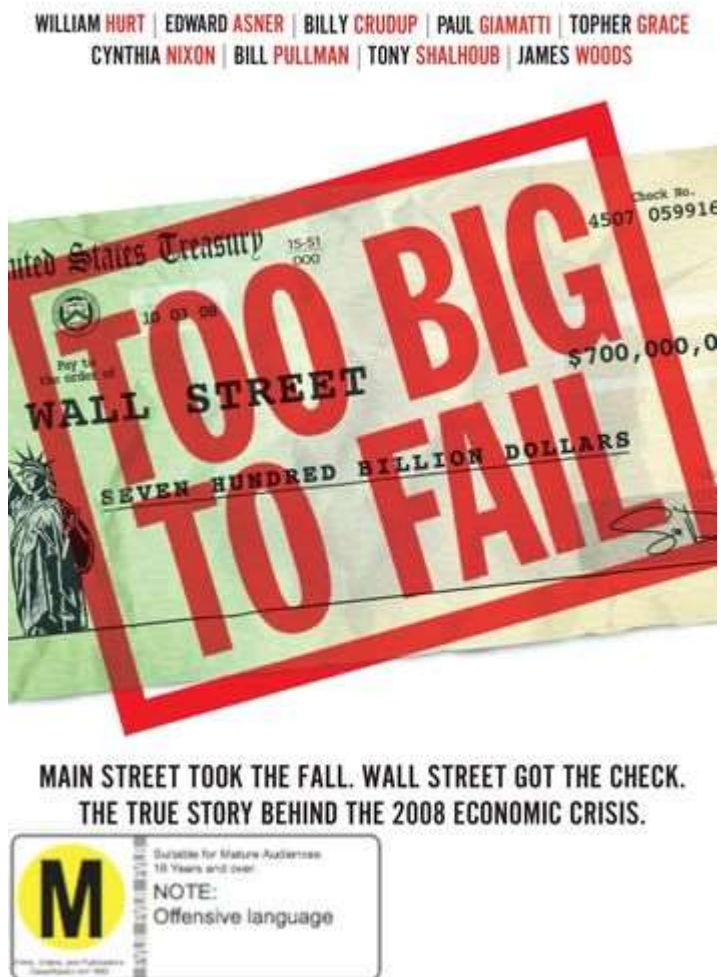


# Financial Networks and Contagion

By Matthew Elliott, Benjamin Golub, and Matthew O. Jackson

李心喆, 陈凌峰, 贺天行

# 一、模型的建立



# 一、模型的建立

## ● 破产

- 第一，当一个企业的价值下降到某一个临界值时，企业破产
- 第二，当企业破产时会产生一个非线性的损失  $\beta$ ，并且这个损失直接从破产企业的现金流中抽走。
- 如果企业价值  $i$  的价值  $v_i$  低于  $\underline{v}_i$ ，那么企业  $i$  破产并引发损失  $\beta_i(p)$

## ● 实证

- Davydenko, Strebulaev, and Zhao 2012, as well as James 1991:

破产成本=企业价值的 21.7%

# 一、模型的建立

- 企业: 将企业简化理解成持有有一定量价值的资产的组织, 且资产种类不变
  - 企业的集合:  $N = \{1, \dots, n\}$ ; 资产的集合:  $M = \{1, \dots, m\}$
  - 资产的市场价格 (带来未来现金流的折现) 的向量:  $P = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_m)^T$
  - $D_{ik}$  表示企业*i*持有的资产*k*价值的比例, 所有企业对资产的持有情况由  $i \times m$  矩阵  $D$  表示。
- 金融上的相互依赖关系
  - 企业间持股关系:  $C$ , 对任意  $i \neq j$ ,  $C_{ij}$  大于等于 0 表示企业  $j$  的股票被企业  $i$  持有的比例。
  - $\widehat{C}_{ii} = 1 - \sum_{j \in N} C_{ij}$ , 表示企业  $i$  被自身或者说是外部投资者持有的比例。
  - 作者将所有的企业间金融联系定义为线性成比例的形式, 这是由于作者主要考虑破产问题, 而在破产清算过程中, 债权人的权益也被换算成对公司剩余资产的索取权, 因此也是公司价值的一个线性比例。

# 一、模型的建立

- 价值的界定

- $V_i = \sum_k D_{ik} \times p_k + \sum_j C_{ij} \times V_j$  (1), 账面价值等于其持有的资产价值加上其他企业账面价值。

- $V = DP + CV$ , 于是,  $V = (I - C)^{-1}Dp$ ——可是?

- $\sum_i V_i = \sum_i \sum_k D_{ik} p_k + \sum_j (\sum_i C_{ij}) V_j$ , 也即企业账面价值的加总大于所有资产创造现金流的能力。

- $v_i$ 定义的引入

- $\sum_i (1 - \sum_j C_{ji}) V_i = \sum_i \sum_k D_{ik} p_k$ , 也即企业自有的股权价值正好等于所有资产创造现金流的能力。

- $v = \hat{C}V = \hat{C}(I - C)^{-1}Dp = ADp$ , 即新的对企业价值的理解 $v_i$ 。

# 一、模型的建立

- 矩阵A的界定：将企业价值和基础资产直接联系起来
  - $A = \widehat{C}(I - C)^{-1}$ ,  $A_{ij}$ 代表了i企业的外部股东对j企业持有的资产的索取权——A矩阵是一个状态的转移矩阵，将每个企业持有的资产总价值 $Dp$ 转移到每个企业的企业价值 $v$ 。
  - 因此A矩阵具有性质： $\sum_{i \in N} A_{ji} = 1$
- 引理1： $\widehat{C}_{ii}$ 是 $A_{ii}$ 取值的下界，且 $A_{ii}$ 可以比 $\widehat{C}_{ii}$ 大很多
  - 对任意i,  $\frac{A_{ii}}{\widehat{C}_{ii}} \geq 1$ , 且只在不存在交叉持股时取等；任意 $n \geq 2$ 存在矩阵C使得 $\frac{A_{ii}}{\widehat{C}_{ii}} \rightarrow \infty$ 对任意i成立。
  - 证明： $A = \widehat{C} \sum_{p=0}^{\infty} C^p = \widehat{C} + \widehat{C} \sum_{p=1}^{\infty} C^p$ ;  $\widehat{C}_{ii} = \varepsilon(\forall i)$ ,  $\widehat{C}_{ij} = \frac{1-\varepsilon}{n-1} (\forall i \neq j)$ , 取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。
  - 理解：企业在面临自身资产价值意外下降的冲击时实际收到的威胁超过账面上的自我持股数。

# 一、模型的建立

- 破产对价值的影响

- 有了A作为真正的企业价值相互影响的矩阵，就可以将破产成本计入企业价值。

- $V_i = \sum_k D_{ik} \times p_k + \sum_j C_{ij} \times V_j - \beta_i I_{v_i < \underline{v}_i}$

- $\mathbf{V} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{p} - \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{p}))$ ，破产成本是直接减少在破产企业的现金流，也即在资产价值上的。

- $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{V} = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{p} - \mathbf{b}(\mathbf{v})) = \mathbf{A}(\mathbf{D}\mathbf{p} - \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{p}))$

- i企业价值由于j企业破产而承受的损失为 $A_{ij}\beta_j$

# 一、模型的建立

- 小试牛刀：命题一：

- 假设在资产价格向量为 $p$ ，且 $C, D$ 给定时，企业 $i$ 是最接近破产的，其破产临界点为 $\underline{v}_i$ ，在 $C, D$ 不变时在价格 $q(p, c, d)$ 位置达到破产临界点。如果在当期价格水平下发生了一笔公平交易使得 $C, D$ 变成 $C', D'$ ，也就是新的 $A'$ 至少有一列不同于 $A$ 。那么，对任何 $\varepsilon > 0$ ，存在 $p'$ 在 $q(p, c, d)$ 的 $\varepsilon$ 邻域内，使得企业 $i$ 在价格水平 $p'$ 下若保持原有 $C, D$ 结构不会破产，但经过公平交易却会破产，即 $v_i(p', C', D') < \underline{v}_i < v_i(p', C, D)$
- 交易： $C$ 和 $D$ 矩阵的变化，即拿持有的资产和企业股票进行交换，
- 价格水平 $p$ 上的公平交易：交易前后的 $C, D$ 与 $C', D'$ 可使得所有企业的价值向量在交易前后不变， $v=v'$ 。
- 资产价格 $p$ 的水平看作是外生给定的， $p$ 变化就是对金融体系的一次冲击。
- 如果只依赖公平交易的市场机制，不存在一种金融架构 $C$ 和 $D$ 使得其面临每一种外生冲击时都是最好的，也即市场无法达到真正的最优解。



# 一、模型的建立

- 小试牛刀：反证法：  $\forall p, v_i(p'', C', D' | Z = \emptyset) \geq v_i(p'', C, D | Z = \emptyset)$ 
  - $A'$ 至少有一列不同于A，存在一个价格 $p''$ 在破产价格的邻域内，使得 $v_i(p'', C', D' | Z = \emptyset) \neq v_i(p'', C, D | Z = \emptyset) = \underline{v}_i$
  - 所以：存在一个价格 $p''$ 使得 $v_i(p'', C', D' | Z = \emptyset) > v_i(p'', C, D | Z = \emptyset) = \underline{v}_i$  (1)
  - 构造 $p'$ 使得 $\frac{1}{2}p'' + \frac{1}{2}p' = q(p, c, d)$ ， $p'$ 也在破产价格邻域内
  - 由于给定A和D不变，价值就是p的线性函数——
  - $\frac{1}{2}v_i(p'', C', D' | Z = \emptyset) + \frac{1}{2}v_i(p', C', D' | Z = \emptyset) = v_i(q(p, c, d), C', D' | Z = \emptyset) = \underline{v}_i$  (2)
  - $\underline{v}_i = v_i(q(p, c, d), C, D | Z = \emptyset) = \frac{1}{2}v_i(p'', C, D | Z = \emptyset) + \frac{1}{2}v_i(p', C, D | Z = \emptyset)$  (3)
  - 结合1, 2, 3, 得证 $p'$ 就是满足命题1的价格水平。

## 二、定义与前提假设

- 企业间的联系放大了破产影响：一个简单的例子

- 假设：1) 企业1完全拥有价值 $p_1$ 的资产，2)  $p_1' < p_1$ ，3)  $v_1(\mathbf{p}) > \underline{v}_1 > v_1(\mathbf{p}')$

- 经济学直觉：当资产价值从 $p_1$ 下降为 $p_1'$ 时，企业1破产

- 企业2会受到企业1破产的影响，资产价值下降  $A_{21}\beta_1$

- 如果企业2因此破产，企业3会受到企业1和企业2破产的影响，资产价值下降  $A_{31}\beta_1 + A_{32}\beta_2$

- 如果企业3也因此破产，则这样的金融海啸会不断传递



- 如果序列中前 $K$ 家企业在海啸中破产，经济体的总损失为  $\beta_1 + \dots + \beta_K$

## 二、定义与前提假设

- 谁会在金融海啸中失败？

- 要了解经济系统对金融海啸的抵御能力，以及金融海啸传播的范围有多广，第一步就是确认哪些组织会在金融海啸中破产

- 举个例子：

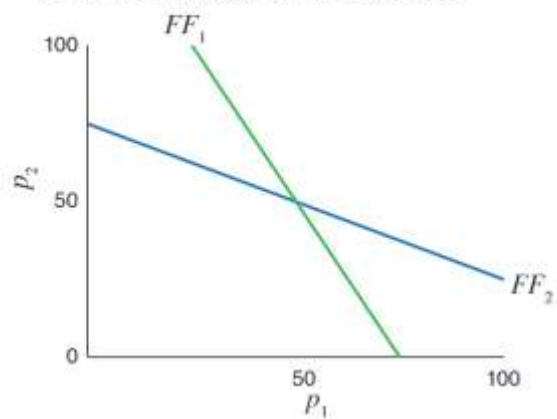
- 1) 假设企业在其价值低于50时破产，并产生50的破产成本

- 2) 此时企业i将在  $\frac{2}{3}p_i + \frac{1}{3}p_j < 50$  时破产（根据**A**矩阵得出，如下图A所示）

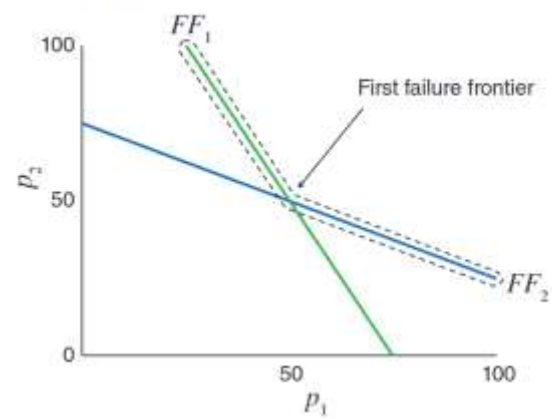
- 3) 不仅如此，当企业j破产时，企业i会承担破产成本的1/3，此时企业i的破产边界变为  $\frac{2}{3}p_i + \frac{1}{3}(p_j - 50) < 50$ . (如下图B所示)

## 二、定义与前提假设

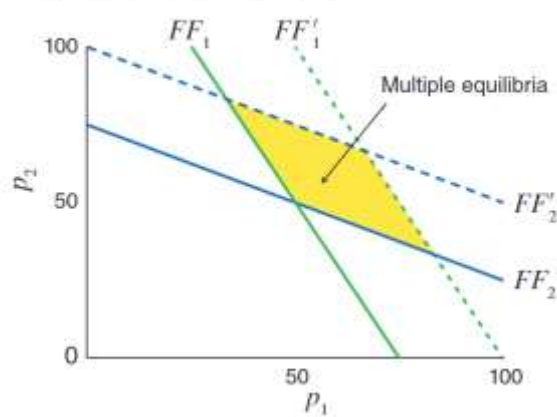
Panel A. Unconditional failure frontiers



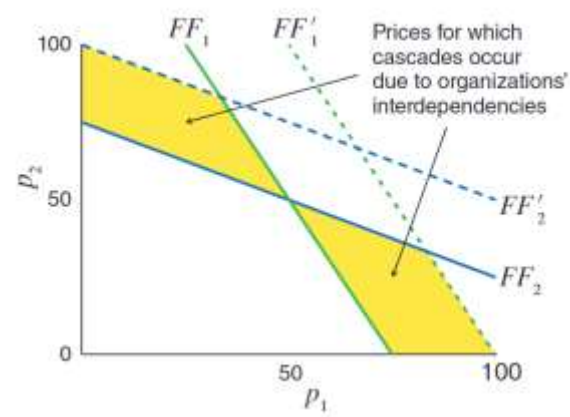
Panel B. The first failure frontier



Panel C. Multiple equilibria



Panel D. Cascades of failure



## 二、定义与前提假设

- 识别金融海啸：一个简单算法

- 与简单例子不同，条件错误边界的数量随着组织数量的增长呈现指数级增长，这使得几何描述在更大的环境中不行

- 因此我们提供一个算法，在 $t$ 期， $Z_t$ 表示失败组织集合，初始状态下 $Z_0 = \text{空集}$

当 $t \geq 1$ 时，

- $\mathbf{b}_{t-1}$ 表示一个向量， $b_i = \beta_i$ （如果 $i \in Z_{t-1}$ ），否则等于0
- $Z_t$ 表示 $k$ 的集合，使得元素 $k$ 满足  $\mathbf{A}[\mathbf{D}_p - \tilde{\mathbf{b}}_{t-1}] - \underline{\mathbf{v}}$  为负
- 当 $Z_t = Z_{t-1}$ 时，终止循环，否则持续该流程

当这个算法在第 $T$ 期结束时， $Z_T$ 表示在最佳均衡情况下失败的企业集合

## 二、定义与前提假设

- 政策建议

- 如果倒闭潮中任何一波倒闭的集合为空，那么倒闭潮就会停止。
- 这表明限制倒闭潮的一个有效方法是瞄准等级更高、企业更少的层次，例如保护关键的节点，而不考虑同层次的其他企业是否倒闭。（保护同层的所有企业不是必须的）

## 二、定义与前提假设

- 定义集中度和多元化：多元化

- 定义：对企业*i*来说，当交叉持股者的数量增加，且原有持股者每人持股数量均下降时，成为多元化程度上升。

- 数学形式：

当交叉持股矩阵**C'**与**C**满足如下条件时，称**C'**的多元化程度高于**C**

- 对任意*ij*来说，当 $C_{ij} > 0$ 时， $C_{ij}' \leq C_{ij}$

- 对某些*ij*来说， $C_{ij}' > C_{ij} = 0$

- 经济学含义：

多元化程度捕获了金融体系中交叉持股的扩散

## 二、定义与前提假设

- 定义集中度和多元化：集中度

- 定义：对企业*i*来说，如果交叉持股体系外的股东持有的股份下降，那么每个企业被其他所有企业所交叉持有的股份总数略微上升，此时称为体系集中度上升

- 数学形式：

当交叉持股矩阵**C'**与**C**满足如下条件时，称**C'**的多元化程度高于**C**

- 对任意*i*来说， $\hat{C}'_{ii} \leq \hat{C}_{ii}$

- 这一条件等价于  $\sum_{j:j \neq i} c'_{ji} \geq \sum_{j:j \neq i} c_{ji}$

- 经济学含义：

集中度捕获了金融体系中交叉持股的深度



## 二、定义与前提假设

### ● 金融海啸的必要组成部分

- 第一个破产者：一些企业足够容易受到某些资产贬值的冲击，并因此倒闭
- 传播：其他的某些企业对第一个倒闭者足够敏感，使得他们也破产了
- 相互连接：交叉持股网络必须足够充分地连接，使得金融海啸可以广泛传播，而不是局限在一个小范围里
- 一些注意点：
  - 1) 当增加集中度时，单个企业对自己的资产更加不敏感，所以第一次破产者出现的可能性变小了，但倒闭潮的传播变得更加容易，即使得条件1改善，使得条件2变糟糕
  - 2) 随着多样性增加，企业更少依赖于其他企业，降低了倒闭潮传播的风险，但网络的连接程度上升，因此传播的范围扩大了，使得条件3变得更糟

## 二、定义与前提假设

- 多元化与集中度如何影响金融海啸：集中度

- 假设：1) 初始交叉持股矩阵 $\mathbf{C}$ ，2) 破产成本向量 $\boldsymbol{\beta}$ ，3) 破产门槛向量 $\mathbf{v}$ ，4) 直接持有资产矩阵 $\mathbf{D}$ ，5) 资产价值向量 $\mathbf{p}$

- 命题2:

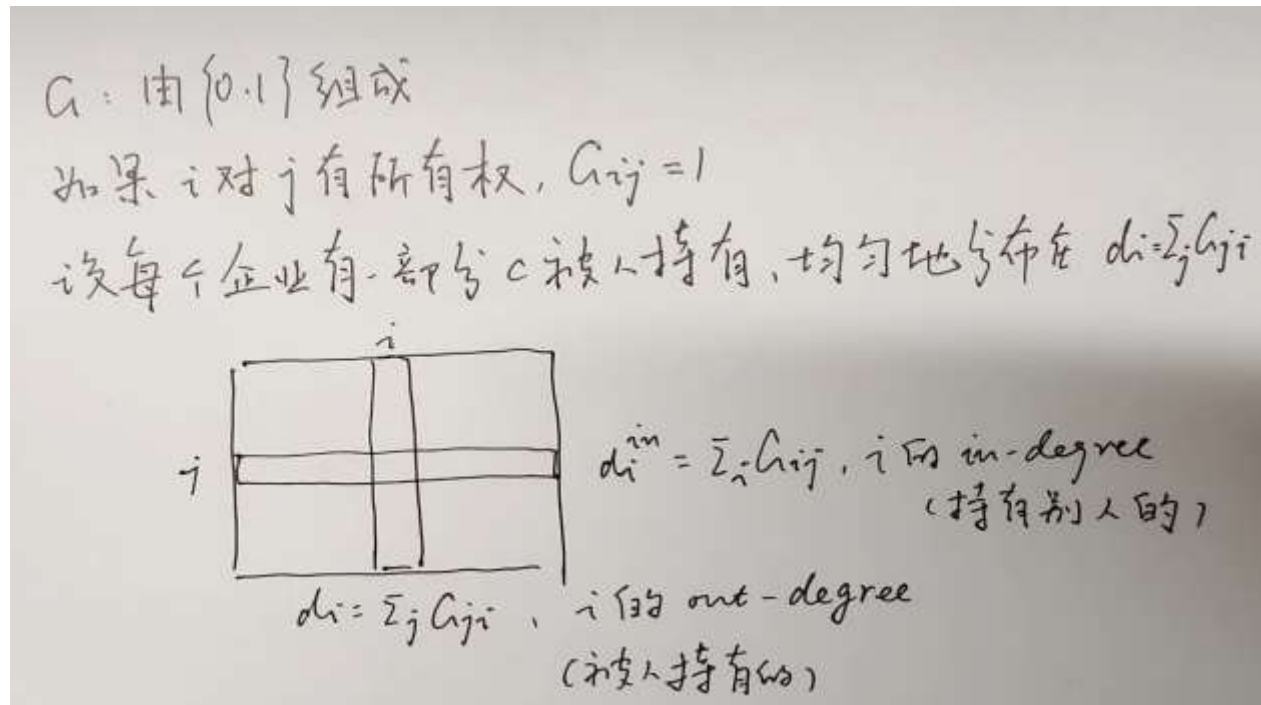
假设体系中存在通过交易 $\mathbf{p}$ 产生联系的 $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ 与 $(\mathbf{C}', \mathbf{D}')$ ，此时集中度提升表示为  $A'_{ij} \geq A_{ij}$  ( $i \neq j$ )。此时第一个破产的企业集合与 $(\mathbf{p}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 和 $(\mathbf{p}, \mathbf{C}', \mathbf{D}')$ 给出的集合一致，并且每一个 $(\mathbf{p}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 系统中因金融海啸倒闭的企业也会在 $(\mathbf{p}, \mathbf{C}', \mathbf{D}')$ 系统中因此倒闭。

- 该命题指出，如果通过交易来增加集中度，交易使得交叉持股程度上升

## 二、定义与前提假设

- 多元化与集中度如何影响金融海啸：随机网络

➤ 定义矩阵G、企业流通价值c、出度 (out-degree)  $d_i$ 与入度 (in-degree)  $d_i^{in}$



$$C_{ij} = \begin{cases} \frac{cG_{ij}}{d_j} & \text{if } d_j > 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

## 二、定义与前提假设

- 多元化与集中度如何影响金融海啸：随机网络

- 企业剩余的 $1-c$ 部分由外部股东持有，即  $\hat{C}_{jj} = 1 - c$ （当 $d_j > 0$ 时）

- 当 $c$ 固定时，随着出度 $d_j$ 的增加，持有 $j$ 的企业数量增加，但每个人持有的数量减少

- 因此在模型中， $d_j$ 增加意味着多元化程度上升，但不增加集中度（ $d_j$ 一开始不等于0）

- 当 $\mathbf{G}$ 固定时，随着 $c$ 增加，每个企业拥有的自己的资产减少，但拥有其他企业的资产数上升

- 因此在模型中， $c$ 增加意味着集中度程度增加，但不增加多元化程度

- 引理2：假设对于某些邻接矩阵 $\mathbf{G}$ 来说， $C_{ij} = c\mathbf{G}_{ij}/d_j$ ， $0 < c < 1/2$ 且每个 $d_i \geq 1$ ，那么随着 $c$ 增加， $A_{ii}$ 递减而 $A_{ij}$ 递增

## 二、定义与前提假设

- 多元化与集中度如何影响金融海啸：随机网络

➤ 定义：定义度分布 $\pi = \pi(k, l)$ ，其中节点 $\pi_{k, l}$ 具有入度 $k$ 与出度 $l$ ，且 $0 \leq k, l \leq n-1$ 。令 $G(\pi, n)$ 表示 $n$ 节点且具有度分布 $\pi$ 的向图集合。后文模型中具有度分布 $\pi$ 的随机网络，是从 $G(\pi, n)$ 中随机抽取的

➤ 对于给定的度分布 $\pi$ ,

1) 定义网络的最大度为： $\bar{d} = \max\{k : \pi_{kl} > 0 \text{ or } \pi_{lk} > 0 \text{ for some } l\}$

2) 定义网络的最小度为： $\underline{d} = \min\{k : \pi_{kl} > 0 \text{ or } \pi_{lk} > 0 \text{ for some } l\}$

3) 定义平均有向度 $d$ 为：从 $G(\pi, n)$ 中随机选择的出度期望

上述三个定义共同构成了多元化的概念，其中 $d$ 取正值

## 二、定义与前提假设

- 多元化与集中度如何影响金融海啸：随机网络

- 设定：1) 企业资产价值为1, 2) 破产门槛为(0,1)之间的一个数, 3)  $\beta_i = p_i$

- 命题3A:

当以下任一条件成立时，破产的企业数将趋于0

(i)  $d < 1$  (*diversification is too low*), or

(ii)  $\underline{d} > \frac{c(1-c)}{\underline{v}_{\min}-\underline{v}}$  (*diversification is too high, or integration is too high or low*).

- 命题3B:

当以下两条件均成立时，破产的部分不为0

(i)  $d > 1$  (*diversification is not too low*), and

(ii)  $\bar{d} < \frac{c(1-c)}{\bar{v}_{\max}-\underline{v}}$  (*diversification is not too high and integration is intermediate*).

- 换言之，只有当系统的集中化与多元化程度均位于中等程度时，金融海啸才会发生

# 三、随机模拟实验验证

## • 模型假定

- (1) 每个组织只有一个专有资产，因此  $m = n$  和  $D = I$
- (2) 为简单起见，我们还从所有组织的资产值  $p_i = 1$  开始，并且有共同的失败阈值  $\underline{v}_i = \theta v_i$ ， $\theta \in (0, 1)$
- (3) 交叉持股来自邻接矩阵  $G$ ，其中  $G_{ij} = 1$  表示  $i$  在  $j$  中有交叉持股，我们设置  $G_{ii} = 0$ 。
- (4) 每个组织的一部分股权  $c$  由其他组织持有，平均分布在持有它的  $d_i = \sum_j G_{ji}$  组织中，如第 IIIA 节所示。组织剩余的  $1 - c$  由其外部股东持有，因此  $C_{ii} = 1 - c$ 。

# 三、随机模拟实验验证

- 有向随机图

- 特别地，我们形成一个有向随机图，每个有向链接的概率为  $\frac{d}{n-1}$ ，
- 因为任何节点的预期入度和出度为  $d$ 。更准确地说，对于图的邻接矩阵  $G$ （通常不是对称的），其中  $G_{ij}$  对于  $i \neq j$  是独立同分布的。伯努利随机变量每个取值 1 的概率为  $\frac{d}{n-1}$ ，否则为 0。



# 三、随机模拟实验验证

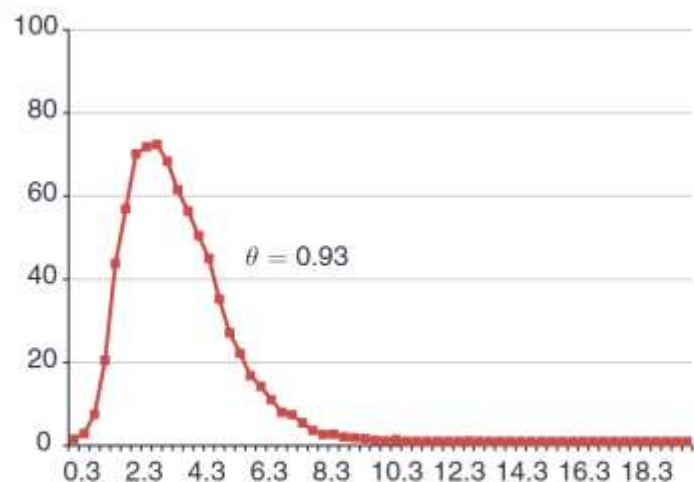
- 模拟随机算法

- STEP1: 如上所述生成参数为  $d$  的有向随机网络  $G$ 。
- STEP2: 如第 IIIA 节所述, 从  $G$  计算矩阵  $C$ 。
- STEP3: 所有组织的资产价值  $p_i = 1$ 。计算组织的初始值  $v_i$  并设置  $\underline{v}_i = \theta v_i$ ,  $\theta \in (0, 1)$ 。
- STEP4: 统一随机选择一个组织  $i$ , 并将  $i$  的专有资产的价值  $p_i$  降至 0
- STEP5: 假设所有其他资产价值 ( $p_j$  for  $j \neq i$ ) 保持为 1, 使用来自第 IIB 节的算法计算最佳情况均衡。

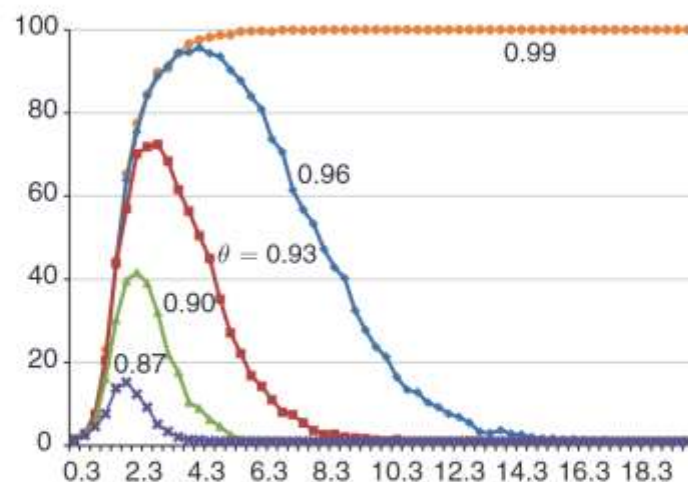
# 三、随机模拟实验验证——结果

- 结论一：多样化的后果——“*It Gets Worse before It Gets Better*”

Panel A. Effects of diversification: the percentage of organizations failing as a function of expected degree for  $\theta = 0.93$  ( $c = 0.5, n = 100$ )



Panel B. Effects of diversification for several failure thresholds: percentage of organizations failing as a function of expected degree for various levels of  $\theta$  ( $c = 0.5, n = 100$ )



Panel A. Low diversification



Panel B. Medium diversification



Panel C. High diversification

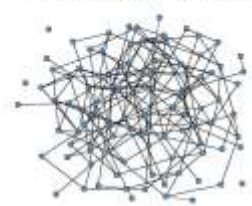


FIGURE 3. EXAMPLE RANDOM NETWORKS (Plotted here with undirected edges) FOR DIFFERENT LEVELS OF DIVERSIFICATION

Note: The diagrams demonstrate the transition from panel A (many disconnected components) to panel B (a large component where each node has few neighbors) to panel C (a large component in which each node has many neighbors).

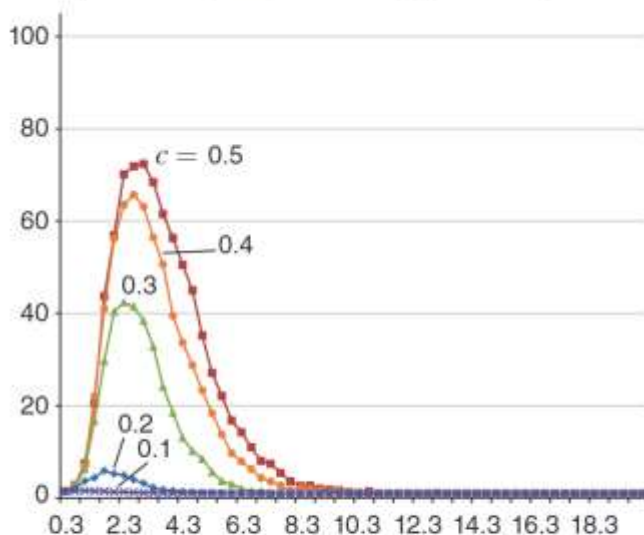
FIGURE 2. HOW DIVERSIFICATION (THE AVERAGE NUMBER OF OTHER ORGANIZATIONS THAT AN ORGANIZATION CROSS-HOLDS) AFFECTS THE PERCENTAGE OF ORGANIZATIONS FAILING (Averaged over 1,000 simulations)

Note: The  $x$ -axis corresponds to diversification in terms of the expected degree in the random network of cross-holdings.

# 三、随机模拟实验验证——结果

- 结论二：在集中度更高的系统中，金融海啸更严重但频率更低

Panel A. Five levels of integration and the percentage of organizations failing as a function of expected degree ( $\theta = 0.93$ ), ( $n = 100$ )



Panel B. Five levels of integration and the percentage of organizations failing as a function of expected degree ( $\theta = 0.96$ ), ( $n = 100$ )

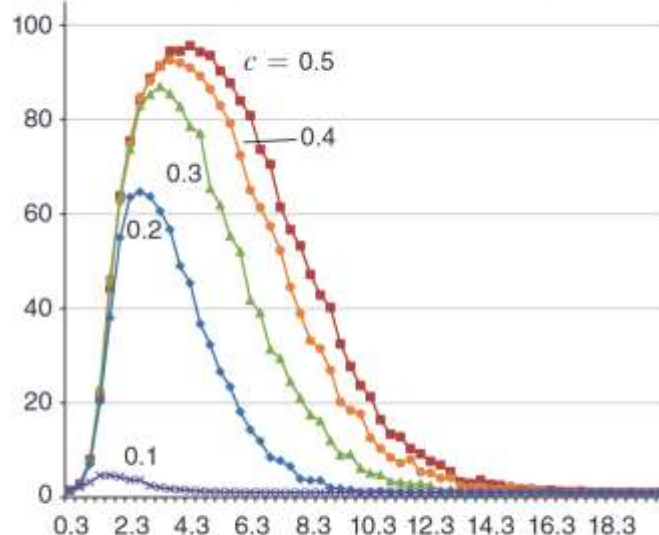


FIGURE 4. HOW INTEGRATION (THE FRACTION  $c$  OF A TYPICAL PORTFOLIO HELD BY OTHER ORGANIZATIONS) AFFECTS THE PERCENTAGE OF ORGANIZATIONS FAILING (Averaged over 1,000 simulations)

Notes: The x-axis corresponds to the diversification level (the expected degree in the random network of cross-holdings). The two figures work with different failure thresholds and depict how the size of cascades varies with the level of integration  $c$  ranging from 0.1 to 0.5.

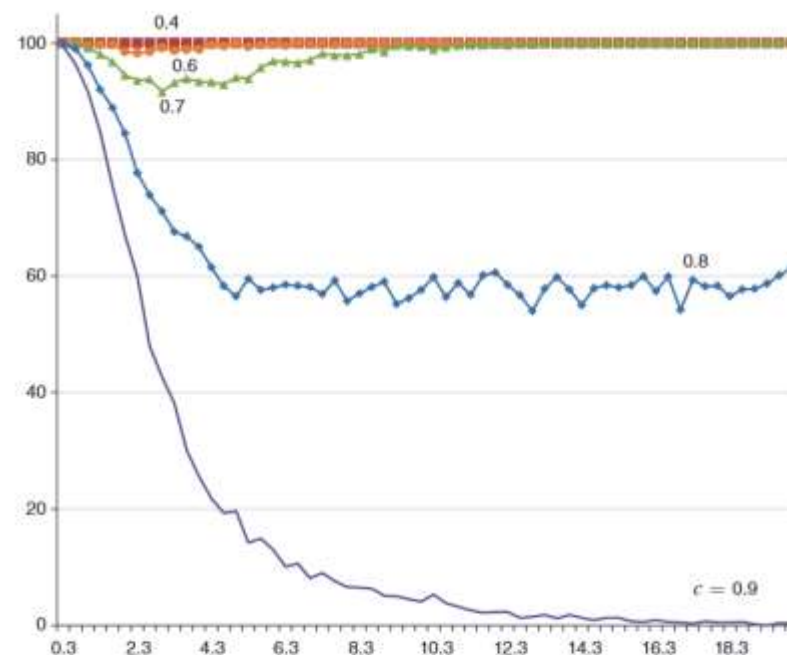


FIGURE 5. HOW INTEGRATION AFFECTS THE PERCENTAGE OF "FIRST FAILURES"

Notes: The percentage of simulations with at least one organization failing, for various levels of integration  $c$  from 0.4 to 0.9, with the x-axis tracking diversification (expected degree) in the network. The failure threshold is constant at  $\theta = 0.8$ .

感谢聆听!