The Network Origins of Aggregate Fluctuations

小组1：陈烨、赵怡琳、黄佳敏、兰宇舟、陈劲宇

小组2：宋思瑶、单诗宇、孙清婉、罗正宇、房柳成

RART 01

引 言

作者简介

Introduction of the writer

Daron・Acemglu
达龙・阿西莫格鲁

麻省理工学院经济学教授、美国国家科学院院士、美国艺术与科学院院士。主要研究领域：宏观经济学，政治经济学，劳动经济学，发展经济学等。

于2005年获得约翰・贝茨・克拉克奖。著有《现代经济增长导论》《国家为什么会失败：权力、繁荣与贫困的来源》等作品。

引言部分：关于前人的研究

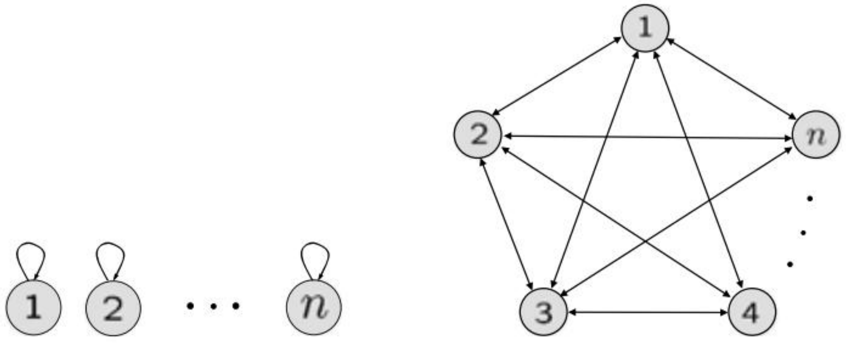
Lucas, R. E.
罗伯特·卢卡斯

根据大数定律，将总体经济部门分解为越来越细的生产单元时，单个部门的冲击在众多部门中会被平均掉，所以它对宏观产出的影响可以忽略不计。

Gabaix, X.
泽维尔·加拜克斯

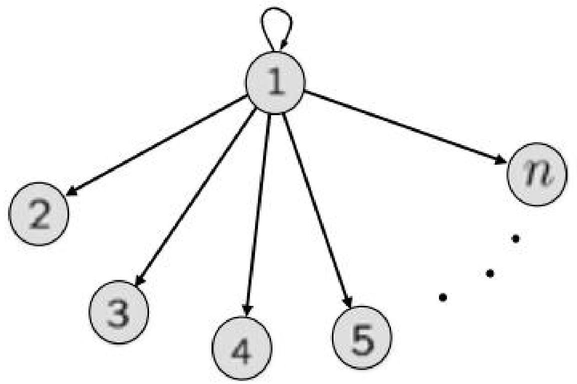
（2011）当企业规模的分布出现厚尾并且最大的企业对总产出贡献的占比特别高时，单个冲击会转化为总体波动。

引言部分：示例1



(a) (b)

1



2 “star network”

图1a：没有部门依赖其他部门生产的经济
图1b：每个部门都同样依赖于所有其他部门的产出

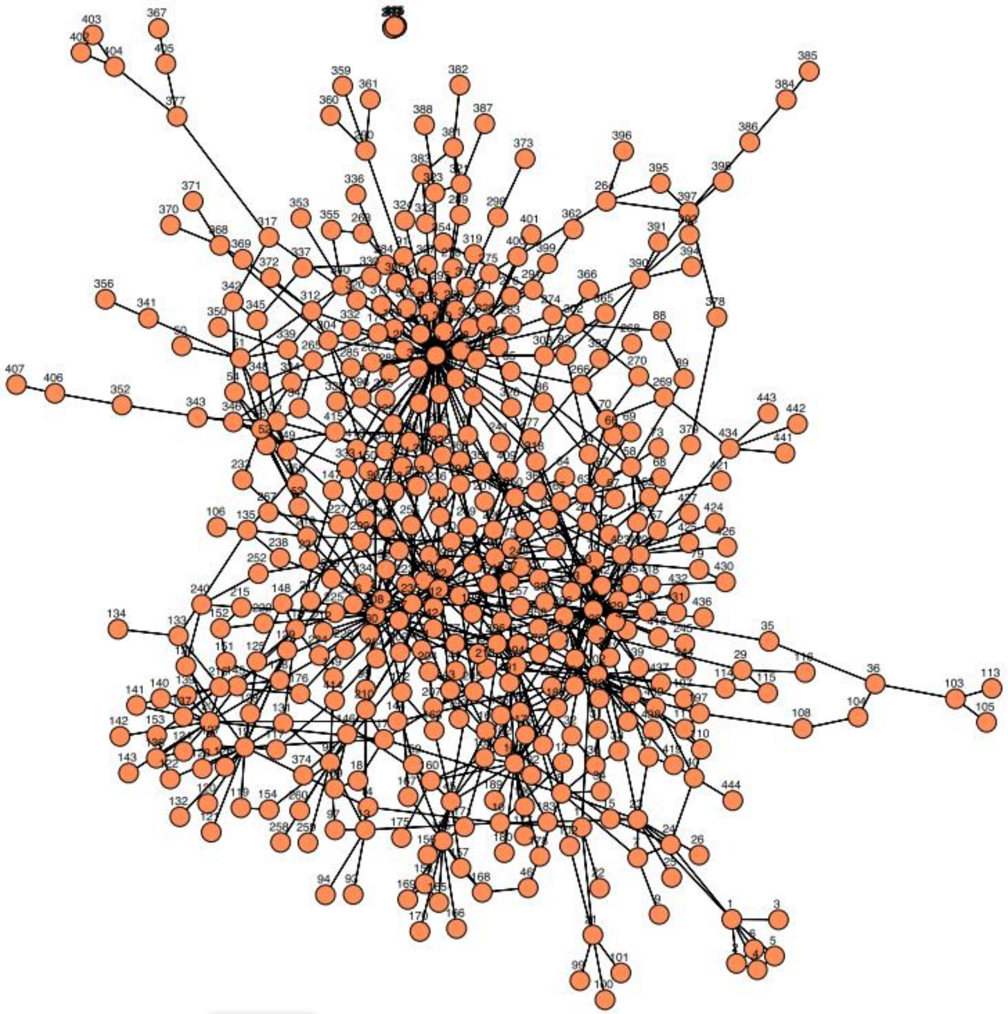
即使n很大，单个部门的冲击也会强烈地传播到经济的其他部分，进而产生显著的总体波动。

仍然适用

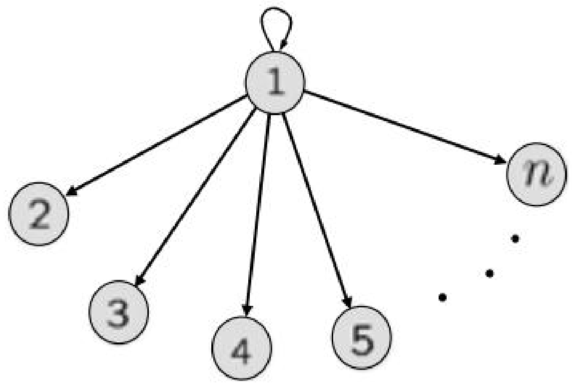
多样化理论

不再适用

引言部分：示例1



3 1997美国工业



2 “star network”

图3表明，即使部门互连的模式并非如星形网络所示，美国经济网络也与图1中描述的网络有显著的不同。

因此，**部门冲击**和**部门间网络结构**的相互作用可能导致相当大的总体经济波动。

PART 02

模　　型

家庭效用函数与企业生产函数

The household utility function and the enterprise production function

01

$$u(c_1, c_2, \dots, c_n) = A\prod_{i=1}^{n}(c_i)^{1/n} \xrightarrow[\text{一阶条件}]{\text{家庭效用最大化}} c_i = \frac{h}{np_i}$$

其中c_i为家庭对部门i的消费，A为标准化常数

02

$$x_i = z_i^{\alpha} l_i^{\alpha} \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{(1-\alpha)\omega_{ij}} \xrightarrow[\text{一阶条件}]{\text{企业利润最大化}} l_i = \frac{\alpha p_i x_i}{h}$$

$$x_{ij} = \frac{(1-\alpha)\ p_i \omega_{ij} x_i}{p_j}$$

z_i是生产力冲击

l_i是部门i雇佣的劳动力数量，

α是劳动力的份额（$\alpha \in$（0，1））

x_{ij}是商品j作为用于生产商品i的中间产品的数量

ω_{ij}是商品j作为用于生产商品i的中间产品，在生产商品i的所有中间产品中所占的份额，

定义ε_i=log（z_i），其分布定义为F_i

假设1

Assumption 1

所有对i部门的投入份额 $\sum_{j=1}^{n} \underline{\omega_{ij}}=1$，j=1，2，…，n

定义加权出度$d_i \equiv \sum_{j=1}^{n} \underline{\omega_{ji}}$

投入产出矩阵W

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix}$$

=1

$=d_3$

于是，一个经济的度序列为$\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$

影响向量

influence vector

03

$$v \equiv \frac{\alpha}{n}\left[I-(1-\alpha)W'\right]^{-1}\mathbf{1}$$

$\frac{\alpha}{n}$表示每个部门的中间投入与总中间投入的比例；

$[I-(1-\alpha)W]^{-1}$为里昂惕夫逆矩阵；

1=$[1,1,\ \ldots,\ 1]^T$，作用是把反映两两产业关联关系的里昂惕夫逆矩阵转化成反映 n 个产业结构特征的列向量，本文中即加权出度向量

总产出

aggregate outputs

04

$$y \equiv \log(GDP) = v' \varepsilon$$

总产出是特定部门生产力冲击的加权和，其中权重由相应的影响向量决定。

$$x_i = z_i^{\alpha} l_i^{\alpha} \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{(1-\alpha)\omega_{ij}}$$

企业利润最大化求一阶条件

$$l_i = \frac{\alpha p_i x_i}{h} \qquad x_{ij} = \frac{(1-\alpha)\ p_i \omega_{ij} x_i}{p_j}$$

（h为工资水平）

将一阶条件代回生产函数，

两侧取对数并除α，

定义常数 $B = \alpha \log(1-\alpha) + (1-\alpha)\log(1-\alpha)$

$$\log(h) = \varepsilon_i + \frac{B}{\alpha} + \frac{\log(p_i)}{\alpha} - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \log(p_i) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \log(\omega_{ij})$$

两侧乘影响向量v的第 i 个元素v_i

并把n个部门对应的式子加总

（此处运用事实$\sum_{i=1}^{n} v_i$=1）

$$\log(h) = v' \varepsilon + \mu$$

$$y = \log(h) = v' \varepsilon$$

影响向量与销售份额

the influence vector and the equilibrium share of sales of sector i

05 $v_i = \frac{p_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}$

$c_i = \frac{h}{n p_i}$　　$x_{ij} = \frac{(1-\alpha)\ p_i \omega_{ij} x_i}{p_j}$

$x_i = c_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ji},\quad \forall i = 1, 2\ldots,\ n$

将家庭效用最大化与企业利润最大化的一阶条件代入商品市场出清条件

$$p_i x_i = \frac{h}{n} + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} p_j x_j \qquad (1)$$

令$s_i = p_i x_i$

$$s_i = \frac{h}{n} + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} s_j \qquad (2)$$

$$s' = \frac{h}{n} + (1-\alpha)\ W s' \qquad (3)$$

$$s' = (h/n)\ 1'[I-(1-\alpha)W]^{-1} = (h/\alpha)\ v' \qquad (4)$$

$s_i = p_i x_i$

$h = \alpha \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$

PART 03

网络结构与总量波动

网络结构与总量波动

NETWORK STRUCTURE AND AGGREGATE FLUCTUATIONS

变量与假设

00

考虑一系列经济 $\{\mathcal{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ，n为部门数量； $\{y_n\}_{n\epsilon N}$和$\{v_n\}_{n\epsilon N}$分别表示综合产出和影响向量的相应序列，w_{ij}^n和d_i^u分别表示矩阵W_n的元素和部门i的出度，并用$\{\varepsilon_n\}_{n\epsilon N}$表示log（特殊生产力冲击）的向量序列，对其分布施加以下假设：

ASSUMPTION 2: *Given a sequence of economies* $\{\mathcal{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *for any sector* $i \in \mathcal{I}_n$ *and all* $n \in \mathbb{N}$,

(a) $\mathbb{E}\varepsilon_{in} = 0$,

(b) $\mathrm{var}(\varepsilon_{in}) = \sigma_{in}^2 \in (\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2)$, *where* $0 < \underline{\sigma} < \overline{\sigma}$ *are independent of* n.

Assumption 2（a）是一种规范化，而Assumption 2（b）可以把特殊波动ε_n与网络结构（通过Leontief逆$[I-(1-\alpha)W]^{-1}$在v中影响总波动 ）分离开来，各自体现对y_n的影响。

3.1总波动性

Aggregate Volatility

定义

01

上文提过，一个经济体的总产出可以用其影响向量来表征，即y_n=$v'_n\varepsilon_n$。而总波动率可用总产出的标准差表示，如下式：

$$(\mathrm{var}\, y_n)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{in}^2 v_{in}^2},$$

其中v_{in}表示v_n的第i个元素。

推论

02

因此，对于满足Assumption 2（b）的任何 $\{\mathcal{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$(6) \qquad (\mathrm{var}\, y_n)^{1/2} = \Theta(\|v_n\|_2).$$

换句话说，随着n不断增大，总波动率与影响向量的欧几里得范数成比例。而在存在强大的跨部门投入产出关系的情况下，总波动率不会消失，如下所例：

3.1总波动性

Aggregate Volatility

示例

03 此处部门1是所有其他部门的单一投入供应商，可以验证相应的影响向量是

$v_n' = \frac{\alpha}{n}\vec{1}' + [\ (1-\alpha)\ , 0, \ldots, 0]$，意味着$||v_n||_2 = \Theta(1)$。

因此，鉴于 $(\mathrm{var}\, y_n)^{1/2} = \Theta(\|v_n\|_2)$. 即使n→ ∞，总波动率也不会消失。

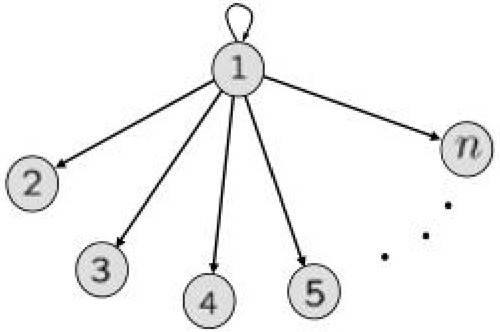


FIGURE 2.—An economy where one sector is the only supplier of all other sectors.

3.1总波动性

Aggregate Volatility

03

示例

$$
W = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & \quad\quad & d_n \end{array}
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
[I-(1-\alpha)W^T]^{-1} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{\alpha} & \frac{1-\alpha}{\alpha} & \frac{1-\alpha}{\alpha} & \cdots \\
 & 1 & 0 & \\
0 & & 1 & \\
 & & & \ddots \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
V_n = \begin{pmatrix}
1+\frac{\alpha}{n}-\alpha \\
\frac{\alpha}{n} \\
\frac{\alpha}{n} \\
\vdots \\
\frac{\alpha}{n}
\end{pmatrix}
$$

$$\|V_n\| = \sqrt{\left(1-\alpha+\frac{\alpha}{n}\right)^2+(n-1)\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{n}+2(1-\alpha)\frac{\alpha}{n}+(1-\alpha)^2}$$

$n \to \infty$ 时. $\|V_n\| = 1-\alpha = \Theta(1)$

3.2渐近分布

Asymptotic Distributions

定理1

01 在大多数现实情况下，总波动率会随着n→ ∞而消失。即使这样，网络结构也可能对总波动产生决定性影响。这个定理通过确定总产出的渐近分布，朝着表征这些效应迈出了第一步：

THEOREM 1: *Consider a sequence of economies* $\{\mathcal{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *and assume that* $\mathbb{E}\varepsilon_{in}^2 = \sigma^2$ *for all* $i \in \mathcal{I}_n$ *and all* $n \in \mathbb{N}$.

(a) *If* $\{\varepsilon_{in}\}$ *are normally distributed for all* i *and all* n, *then* $\frac{1}{\|v_n\|_2} y_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(b) *Suppose that there exist constant* $a > 0$ *and random variable* $\overline{\varepsilon}$ *with bounded variance and cumulative distribution function* $\bar{F}$, *such that* $F_{in}(x) < \bar{F}(x)$ *for all* $x < -a$, *and* $F_{in}(x) > \bar{F}(x)$ *for all* $x > a$. *Also suppose that* $\frac{\|v_n\|_\infty}{\|v_n\|_2} \longrightarrow 0$. *Then* $\frac{1}{\|v_n\|_2} y_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(c) *Suppose that* $\{\varepsilon_{in}\}$ *are identically, but not normally distributed for all* $i \in \mathcal{I}_n$ *and all* n. *If* $\frac{\|v_n\|_\infty}{\|v_n\|_2} \not\longrightarrow 0$, *then the asymptotic distribution of* $\frac{1}{\|v_n\|_2} y_n$, *when it exists, is nonnormal and has finite variance* σ^2.

3.2渐近分布

Asymptotic Distributions

03

结论

1. 定理1证明，由影响向量的欧几里得范数归一化的总产出（也就是y_n）收敛于非退化分布。

2. 定理1还表明，大部分情况下经济的跨部门结构不仅影响收敛速度，而且决定了总产出的渐近分布。

3. 定理1（b）部分表明，如果所有分布函数都有由具有有界方差的随机变量支配的尾部，且若$||v_n||_\infty$收敛到零的速度比$||v_n||_2$快，则总产出收敛于正态分布。

4. 若定理1（c）部分的条件成立，总产出的渐近分布必然取决于部门层面生产力冲击的具体分布。

3.3一阶互连

First-Order Interconnections

01

DEFINITION1

定义一个新的变异系数 CV_n：

给定一个经济$\{\varepsilon_n\}$，其部门的度为$\{d_1^n, \ d_2^n, \ \cdots\cdots, \ d_n^n\}$，变异系数为：

$$CV_n \equiv \frac{1}{\bar{d}_n}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i^n - \bar{d}_n)^2\right]^{1/2}$$

02

THEOREM 2

(7) $$(\operatorname{var} y_n)^{1/2} = \Omega\left(\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i^n)^2}\right)$$

and

(8) $$(\operatorname{var} y_n)^{1/2} = \Omega\left(\frac{1+CV_n}{\sqrt{n}}\right).$$

定理2指出，如果部门间网络的度序列表现出高变异性，那么不同部门的冲击对总产出的影响也有很高的变异性。部门作用的这种不对称性意味着总体波动性的衰减速度要**比$\sqrt{n}$慢**。

经济学含义：直观地说，当变异系数很高时，只有一小部分部门负责经济中的大部分投入供应。它们的低生产率导致所有下游行业的产量降低。

3.3一阶互连

First-Order Interconnections

03

T2-证明

(15) $$v'_n = \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}'\sum_{k=0}^{\infty}[(1-\alpha)W_n]^k$$

$$v'_n \geq \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}' + \frac{\alpha(1-\alpha)}{n}\mathbf{1}'W_n$$

取v'_n 的前两项平方，并化简得到（16）式

(16) $$\|v_n\|_2^2 \geq \frac{\alpha^2}{n^2}\mathbf{1}'\mathbf{1} + \frac{2\alpha^2(1-\alpha)}{n^2}\mathbf{1}'W_n\mathbf{1} + \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{n^2}\|W'_n\mathbf{1}\|_2^2$$

$$= \frac{\alpha^2(3-2\alpha)}{n} + \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{n^2}\|W'_n\mathbf{1}\|_2^2$$

$$= \Theta(1/n) + \Theta\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right),$$

化简依据：即W_n的第i列之和是第i区的出度，W_n所有元素之和等于n。

又由于不等式 $\sqrt{n}\|z\|_2 \geq \|z\|_1$ 对所有n维向量均成立，进行放缩，从而忽略掉（16）式的第一项

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 = n$$

另外，根据出度的均值为1，写出

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \frac{n-1}{n^2}[\mathrm{CV}_n]^2 + \frac{1}{n}$$

导出

$$\mathrm{var}(y_n) = \Omega\left(\frac{1+(\mathrm{CV}_n)^2}{n}\right).$$

3.3一阶互连

First-Order Interconnections

示例

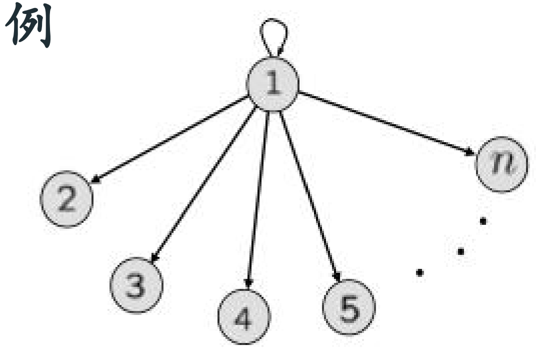


FIGURE 2.—An economy where one sector is the only supplier of all other sectors.

度序列$\{n, 0, 0 \ldots 0\}$

$$CV_n = \left\{\frac{1}{n-1}\left[(n-1)^2 + n - 1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{n-1} \times n \times (n-1)\right]^2 = \sqrt{n}$$

此时，对于所有的n值，总波动率的下限为一个常数，这意味着大数定律失效。

经济学含义：如果经济包含一个“主导”部门，其度随n线性增长，总波动率仍然远离零。

3.3一阶互连

First-Order Interconnections

02 DEFINITION 2

若满足以下条件，则经济体$\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$的度序列具有幂律分布：

如果存在一个常数$\beta>1$，一个缓慢变化的函数$L(\cdot)$，满足对δ>0，$\lim_{t\to\infty} L(t)\,t^{\delta}=\infty$，$\lim_{t\to\infty} L(t)\,t^{-\delta}=0$；

以及有一列正数$C_n=\Theta(1)$，那么对于所有$n\in N$和所有$k<d_n^{max}=\Theta\left(n^{1/\beta}\right)$,我们有

$$P_n(k)=c_n k^{-\beta} L(k).$$

如果对于足够大的x值，$\log P(x)\simeq\gamma_0-\beta\log(x)$，那么$x$具有幂律尾部的经验分布。形状参数β>1捕捉到了（经验）度分布尾部的缩放行为。

COROLLARY 1

考虑一个具有幂律分布的经济序列$\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$的度序列和相应的形状参数 $\beta\in$（1，2）。那么，总体波动率满足

$$(\operatorname{var} y_n)^{1/2}=\Omega\left(n^{-(\beta-1)/\beta-\delta}\right)$$

其中δ是任何 > 0的数

这一推论证明，如果部门间网络的度序列呈现出相对厚尾，那么总体波动率的下降速度要比标准的多样化论证所预测的慢得多。

3.3一阶互连

First-Order Interconnections

03

C1-证明

定义 $\hat{P}_n(k) \equiv \frac{1}{n}\left|\{i \in \mathcal{I}_n : d_i^2 > k\}\right|$ 那么对所有的k，有 $\hat{P}_n(k) = P_n(\sqrt{k})$

同时定义 $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ 作为出度的平方的集合，且满足$b_{k+1} > b_k$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = n \sum_{k=1}^{m} b_k \left[\hat{P}_n(b_{k-1}) - \hat{P}_n(b_k)\right] = n \sum_{k=0}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) \hat{P}_n(b_k)$$

因为b_0=0，则

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = n \int_0^{b_m} \hat{P}_n(t)\, dt = 2n \int_0^{d_{\max}^n} t P_n(t)\, dt$$

再根据$\lim_{t \to \infty} L(t) t^{\delta} = \infty$，可得 $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq n \hat{c}_n \int_0^{d_{\max}^n} t^{(1-\beta-\delta)}\, dt$

又因为$\beta \in (1,2)$，并且 $\hat{c}_n = \Theta(1)$ 推导出 $(\operatorname{var} y_n)^{1/2} = \Omega\left(n^{(1-\beta)/\beta - \delta'}\right)$

3.4二阶互连

Second-Order Interconnections

01 一节互联的缺陷—— Example 2

02 二阶系数—— Definition 3

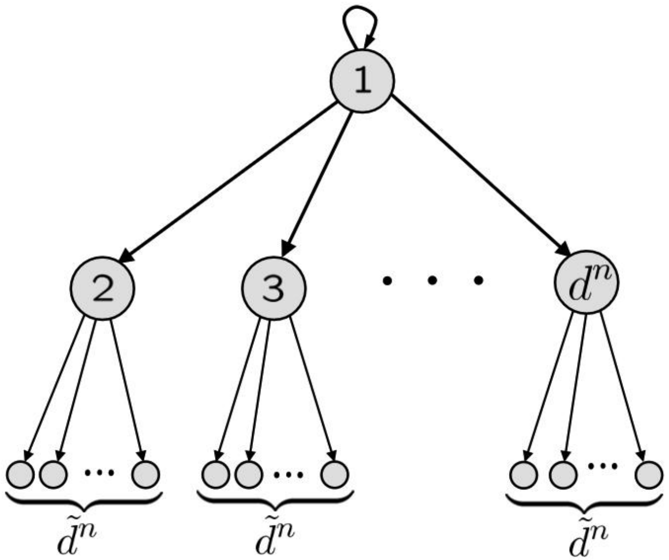
03 二阶总波动率—— Theorem 3

04 二阶度序列分布与总波动率—— Corollary 2

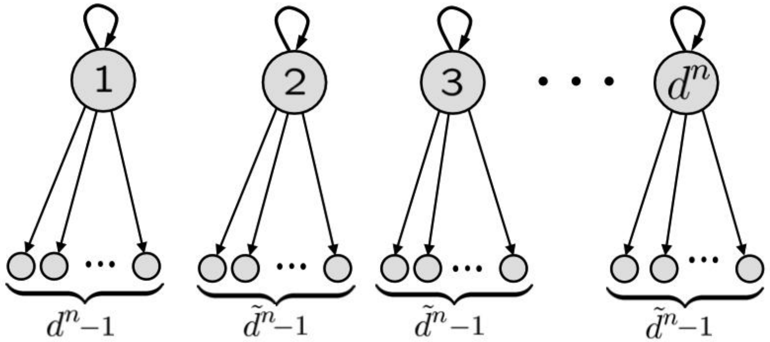
3.4二阶互连

Second-Order Interconnections

01 度序列完全一致的两个经济体



(a) $\mathcal{E}_n$: high degree sectors share a common supplier



(b) $\widehat{\mathcal{E}}_n$: high degree sectors do not share a common supplier

$$\mathrm{CV}_n \equiv \frac{1}{\bar{d}_n}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i^n - \bar{d}_n)^2\right]^{1/2}$$ →CV_n相同→总波动率相同???

3.4二阶互连

Second-Order Interconnections

01 度序列完全一致的两个经济体

$$v_{in} = \begin{cases} 1/n + v_{2n}(1-\alpha)(d^n - 1)/\alpha & \text{if } \; i = 1 \\ \alpha/n + \alpha(1-\alpha)\tilde{d}^n/n & \text{if } \; 2 \leq i \leq d^n \\ \alpha/n & \text{otherwise,} \end{cases} \rightarrow \|v_n\|_2 = \Theta(1)$$

$$\widehat{v}_{in} = \begin{cases} 1/n + (1-\alpha)(d^n - 1)/n & \text{if } \; i = 1 \\ 1/n + (1-\alpha)(\tilde{d}^n - 1)/n & \text{if } \; 2 \leq i \leq d^n \\ \alpha/n & \text{otherwise,} \end{cases} \rightarrow \|\widehat{v}_n\|_2 = \Theta(d^n/n + 1/\sqrt{d^n})$$

又因为：$(\mathrm{var}\; y_n)^{1/2} = \Theta(\|v_n\|_2)$

所以：CV_n相同→总波动率不同！

3.4二阶互连

Second-Order Interconnections

02 二阶系数—— Definition 3

$$\tau_2(W_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i,j} w_{ji}^n w_{ki}^n d_j^n d_k^n$$

i占j的投入比例×i占k的投入比例×j的产出和整个经济体投入的比例×k的产出和整个经济体投入的比例，对全部可能取到的ijk情况进行加和。

经济含义：

度比较高的部门，它们是其他部门的主要供应商，通过共同供应商相互联系的程度。

Rearrangement Inequality

if $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$ and $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_r$, then for any permutation $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_r)$ of $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, we have $\sum_{i=1}^{r} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i b_i$.

3.4二阶互连

Second-Order Interconnections

03 二阶总波动率—— Theorem 3

$$(\mathrm{var}\, y_n)^{1/2} = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\mathrm{CV}_n}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{\tau_2(W_n)}}{n}\right)$$

特点:

①涵盖一阶互联和二阶互联的影响

②捕捉到的信息: 1)部门的规模大小 2)重要部门的集聚效应

Example 2 (continued)——二阶互联影响:

二阶度: $q_i^n \equiv \sum_{j=1}^{n} d_j^n w_{ji}^n$

3.4二阶互连

Second-Order Interconnections

03 Theorem 3证明

影响向量由W矩阵刻画： $v_n' = \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}'\sum_{k=0}^{\infty}[(1-\alpha)W_n]^k$

每一项都非负： $v_n' \geq \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}'\left[I+(1-\alpha)W_n+(1-\alpha)^2(W_n)^2\right]$

欧几里得范数形式：
$$\begin{aligned}\|v_n\|_2^2 &\geq \frac{\alpha^2}{n^2}\mathbf{1}'\left[I+(1-\alpha)W_n+(1-\alpha)^2(W_n)^2\right]\left[I+(1-\alpha)W_n+(1-\alpha)^2(W_n)^2\right]'\mathbf{1}\\ &= \Theta\left(\frac{1}{n^2}\|\mathbf{1}'W_n\|_2^2\right)+\Theta\left(\frac{1}{n^2}\mathbf{1}'(W_n)^2W_n'\mathbf{1}\right)+\Theta\left(\frac{1}{n^2}\|\mathbf{1}'(W_n)^2\|_2^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{1}'(W_n)^2W_n'\mathbf{1} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_{ji}d_id_j\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}w_{ji}d_id_j+\sum_{i=1}^{n}w_{ii}d_i^2\\ &= s(W_n)+\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}'(W_n)^2\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}w_{ji}d_j\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[w_{ii}d_i+\sum_{j\neq i}w_{ji}d_j\right]^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}w_{ii}^2d_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}w_{ii}w_{ji}d_id_j+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j\neq i}w_{ji}d_j\right]^2\\ &= \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i^2\right)+\mathcal{O}\left(s(W_n)\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}d_j^2w_{ji}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i,j}w_{ji}w_{ki}d_jd_k\\ &= \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n}d_i^2\right)+\mathcal{O}\left(s(W_n)\right)+\Theta\left(\tau_2(W_n)\right)\end{aligned}$$

3.4二阶互连

Second-Order Interconnections

03 Theorem 3证明

综合得出： $\|v_n\|_2^2 = \Omega\left(\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + s(W_n) + \tau_2(W_n)\right]\right)$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[d_i - \sum_{j\neq i} w_{ji} d_j\right]^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} d_j^2 w_{ji}^2 + \tau_2(W_n) \geq 2s(W_n)$$

implying that $s(W_n) = \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \tau_2(W_n)\right)$. →主导项是括号里的这两项

$$\|v_n\|_2 = \Omega\left(\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2} + \frac{\sqrt{\tau_2(W_n)}}{n}\right)$$

3.4二阶互连

Second-Order Interconnections

04

二阶度序列分布与总波动率—— Corollary 2

假设二阶度序列满足幂律分布，其总波动率为：

$$(\mathrm{var}\ y_n)^{1/2} = \Omega\left(n^{-\frac{\zeta-1}{\zeta}-\delta}\right)$$

性质：

①如果二阶度的分布相对厚尾，那么总波动率的下降速度比标准多元化论点预测的要慢得多。

②在确定经济总量波动率的衰减率时，二阶效应可能主导程度分布的一阶效应。

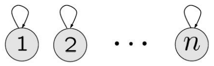
（当一阶和二阶的经验分布都满足幂律分布时，总波动率衰减率的下限由min{β，ζ}确定。）

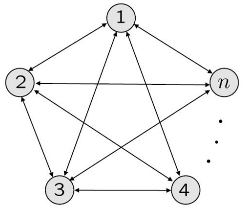
3.5平衡结构

Balanced Structures

01 DEFINITION 4

- 定义：一个平衡结构的经济序列$\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足 $\max_{i\in\mathcal{I}_n} d_i^n = \Theta(1)$
- 经济学含义





02 THEOREM 4

- 若经济序列$\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为平衡结构，则存在$\bar{\alpha} \in (0,1), \alpha \geq \bar{\alpha}$时，使得 $(\operatorname{var} y_n)^{1/2} = \Theta(1/\sqrt{n})$ 成立。
- 经济学含义：定理4表明当部门间网络具有平衡结构且中间投入在生产中的作用不太大时，波动率以$\sqrt{n}$的速率衰减，这意味着部门间网络的其他结构性质不再对总波动率有任何贡献。

3.5平衡结构

Balanced Structures

03

T4-证明

Proof of Theorem 4: First, note that $\|v_n\|_2 = \Omega(1/\sqrt{n})$ for any sequence of economies. On the other hand, for a balanced sequence of economies, we have $\|W_n\|_1 = \max_{i \in \mathcal{I}_n} d_i = \Theta(1)$. Therefore, rearranging equation (4) to

$$v \equiv \frac{\alpha}{n}\left[I - (1-\alpha)W'\right]^{-1}\mathbf{1}. \qquad v_n' = \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}' + (1-\alpha)v_n'W_n,$$

implies that

$$\|v_n\|_\infty \leq \frac{\alpha}{n} + (1-\alpha)\|W_n\|_1\|v_n\|_\infty \leq \frac{\alpha}{n} + C(1-\alpha)\|v_n\|_\infty.$$

where C is a constant independent of n. Thus, for $\alpha > (C-1)/C$,

其中C是与n无关的常数，因此

$$\|v_n\|_\infty \leq \frac{\alpha}{n}\left[1-(1-\alpha)C\right]^{-1},$$

guaranteeing that $\|v_n\|_\infty = \mathcal{O}(1/n)$. Finally, Hölder's inequality, $\|v_n\|_2 \leq \sqrt{\|v_n\|_1\|v_n\|_\infty}$, and the fact that $\|v_n\|_1 = 1$ imply that $\|v_n\|_2 = \mathcal{O}(1/\sqrt{n})$, completing the proof. ∎

3.5平衡结构

Balanced Structures

03 补充

T4附录证明所需用到的性质：

(一). 一般 $\|\cdot\|$ 满足以下性质：

1° $\|A\| \geq 0$

2° $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$

3° $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

又称"三角不等式"

(二) 向量范数 $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$

1-范数：$\|\vec{v}\|_1 \equiv |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$

p-范数：$\|\vec{v}\|_p \equiv (|v_1|^p + |v_2|^p + \cdots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

∞-范数：$\|\vec{v}\|_\infty \equiv \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\}$

(三) 向量诱导的矩阵范数 $\|\cdot\|_p$，$M_{n\times n}$

1-范数 $\|M\|_1 \equiv \max\limits_{v\neq 0} \dfrac{\|M\cdot v\|}{\|v\|}$ "列和最大值"

p-范数 $\|M\|_p \equiv \max\limits_{\|v\|_p\neq 0} \dfrac{\|M\cdot v\|_p}{\|v\|_p}$

$\|M\|_p \equiv \max\limits_{\|v\|_p=1} \|M\cdot v\|_1$

∞-范数：$\|M\|_\infty \equiv \max\limits_{v\neq 0} \dfrac{\|M\cdot v\|_\infty}{\|v\|_\infty}$

$\|M\|_\infty \equiv \max\limits_{v\neq 0} \|M\cdot v\|_\infty$ "行和最大值"

"列和最大值" $\max\{\sum_i |a_{i1}|, \ldots, \sum_i |a_{in}|\}$

"行和最大值" $\max\{\sum_j |a_{1j}|, \ldots, \sum_j |a_{nj}|\}$

$\Rightarrow \|M\|_\infty = \|M'\|_1 \Leftrightarrow \|M'\|_\infty = \|M\|_1$

3.5平衡结构

T4附录证明

由前文3.1总波动率证明结论可得

$$(\mathrm{Var}\, y_n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{in}^2 v_{in}^2}$$

且对任意经济序列 $\{\mathcal{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：

$$(\mathrm{Var}\, y_n)^{\frac{1}{2}} = \Theta(\|v_n\|_2) \cdots\cdots (6)$$

需证 Theorem 4：$(\mathrm{Var}\, y_n)^{\frac{1}{2}} = \Theta(1/\sqrt{n})$

即证：

$\because$ 对任意经济体满足：

$$\|v_n\|_2 = \Omega(1/\sqrt{n})$$

且对平衡结构经济中：

$$\|W_n\|_1 = \max_{v\neq 0} \frac{\|M\cdot v\|_1}{\|v\|_1}$$

$$= \max_{i\in I_n} d_i = \Theta(1)$$

由定义计 $v \equiv \frac{\alpha}{n}[I-(1-\alpha)W']^{-1}\cdot \mathbf{1} \cdots (4)$

转置：$(I-(1-\alpha)W_n')v_n = \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}$

$$v-(1-\alpha)W_n' v_n = \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}$$

$$v_n = \frac{\alpha}{n}\mathbf{1} + (1-\alpha)W_n' v_n$$

$$v_n' = \frac{\alpha}{n}\mathbf{1}' + (1-\alpha)v_n' W_n$$

两边同时取 $\|\cdot\|_\infty$

$$\|v_n'\|_\infty = \left\|\frac{\alpha}{n}\cdot\mathbf{1}' + (1-\alpha)v_n'\cdot W_n\right\|_\infty$$

由范数"三角不等式"性质可得：

$$\|v_n'\|_\infty = \|v_n\|_\infty \le \frac{\alpha}{n}\cdot\|\mathbf{1}'\|_\infty + \|v_n'\cdot W_n\|_\infty (1-\alpha)$$

只需证：$\|v_n'\cdot W_n\|_\infty \le \|W_n\|_1 \cdot \|v_n\|_\infty$

$$\frac{\|W_n'\cdot v_n\|_\infty}{\|v_n\|_\infty} \le \|W_n\|_1$$

由定义可得：

$$\frac{\|W_n'\cdot v_n\|_\infty}{\|v_n\|_\infty} \le \max_{v\neq 0}\frac{\|W_n'\cdot v\|_\infty}{\|v\|_\infty}$$

$$\frac{\|W_n'\cdot v_n\|_\infty}{\|v_n\|_\infty} \le \|W_n'\|_\infty = \|W_n\|_1$$

即可得：

$$\|v_n'\|_\infty \le \frac{\alpha}{n}\|\mathbf{1}'\|_\infty + (1-\alpha)\cdot\|W_n\|_1\cdot\|v_n\|_\infty$$

$$\|v_n'\|_\infty \le \frac{\alpha}{n} + (1-\alpha)\cdot\|W_n\|_1\cdot\|v_n\|_\infty$$

$$\|v_n\|_\infty = \|v_n'\|_\infty \le \frac{\alpha}{n} + (1-\alpha)\cdot\|W_n\|_1\cdot\|v_n\|_\infty \le \frac{\alpha}{n} + C(1-\alpha)\|v_n\|_\infty$$

$$\therefore \|v_n\|_\infty \le \frac{\alpha}{n}[1-(1-\alpha)C]^{-1}$$

得证了：$\|v_n\|_\infty = O(1/n)$

由 Hölder 不等式可知：$\|v_n\|_2 < \sqrt{\|v_n\|_1\|v_n\|_\infty}$

且由事实 $\|v_n\|_1 = 1$ $\therefore \|v_n\|_2 < \sqrt{\|v_n\|_\infty}$

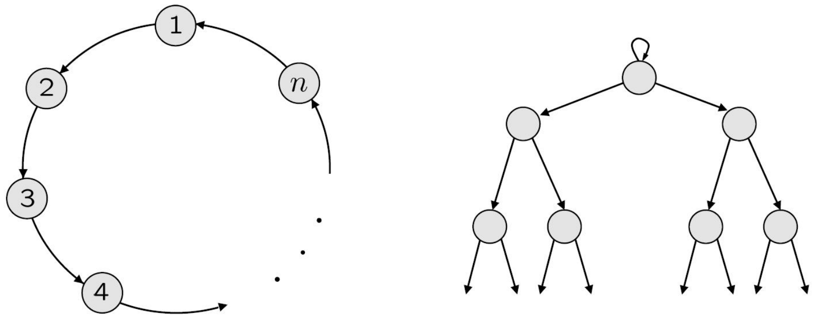
可得：$\|v_n\|_2 = O(1/\sqrt{n})$ #

3.5平衡结构

Balanced Structures

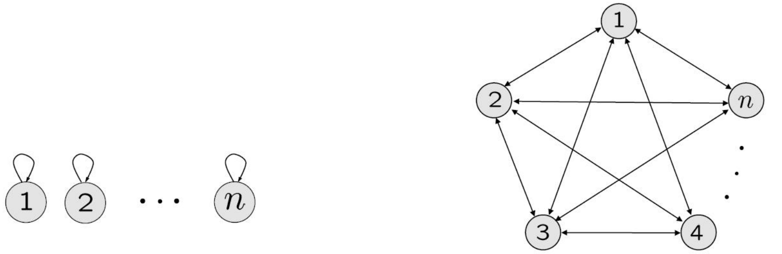
04 COROLLARY 1

- 推论：许多通常被认为是“脆弱”的网络结构，如图5，就总波动率而言，与图1中的结构具有完全相同的渐近行为。事实上，与Horvath(1998)的猜想相反，投入产出矩阵的“稀疏性”对渐近分布没有影响。
- 只有在不同部门结构不对称的网络结构中——无论是在一级还是高阶相互联系方面——部门(或更微观的)冲击才可能成为总体波动的根源。



(a) The ring (b) The binary tree

Figure 5: Economies with balanced intersectoral network structures: aggregate volatility decays at rate $\sqrt{n}$.



(a) An economy in which no sector relies on other sectors for production

(b) An economy in which each sector relies equally on all other sectors

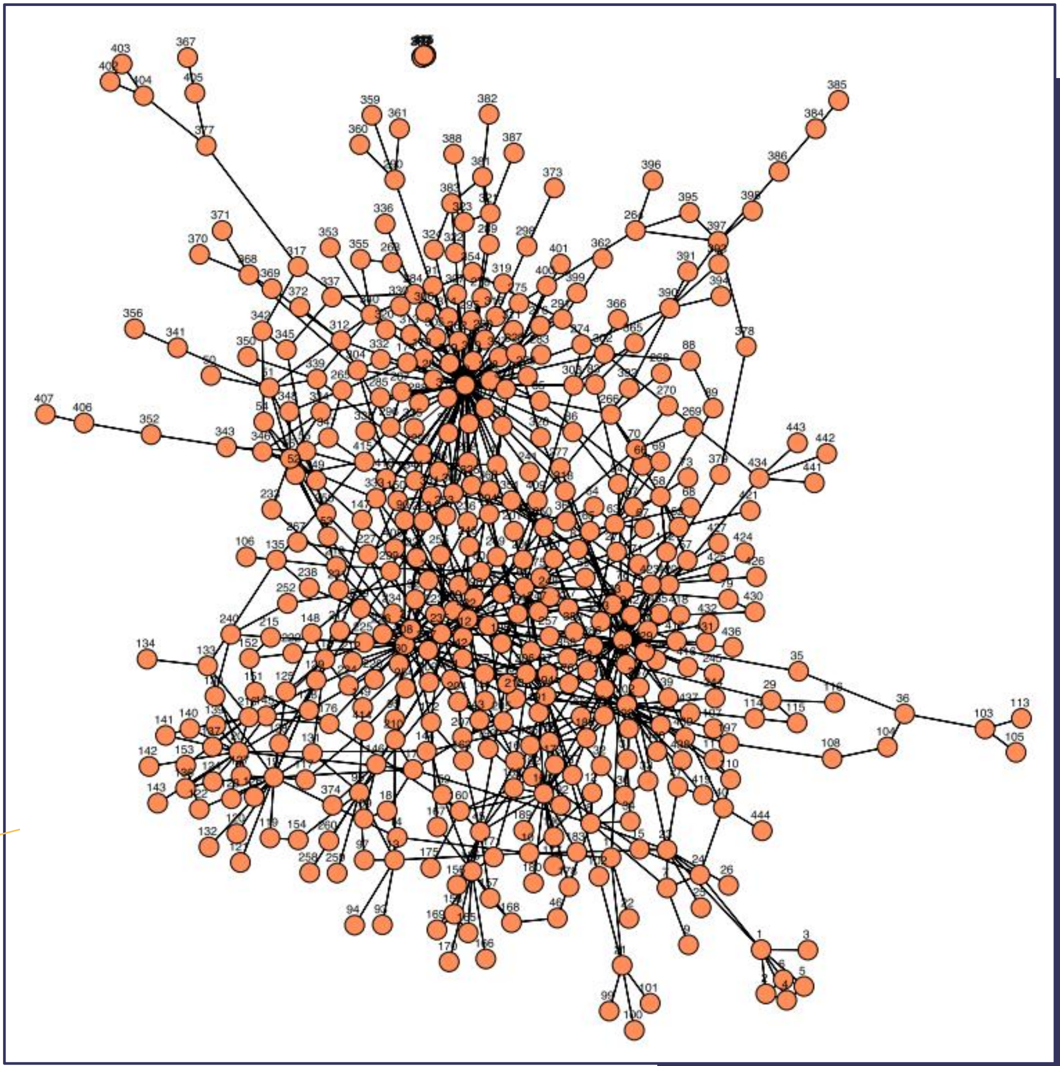
Figure 1: The network representations of two symmetric economies

RART 04

实证分析与应用

美国经济的部门间网络结构图

Network structure diagram



· 1972-2002年期间的详细基准投入产出账户中的商品-商品直接需求表。

· 如果一个行业在另一个行业的所有投入品总量中所占份额大于等于5%，就画一条连线。

各种商品中间投入份额（每个部门加权指数）的变化

the variation in total intermediate input shares across commodities

· 2002年中间投入份额的经验密度的非参数估计。

· 自1972年以来每个详细的直接需求表的相同密度。

· 这一平均份额保持稳定，从1987年的最低0.52到2002年的最高0.58

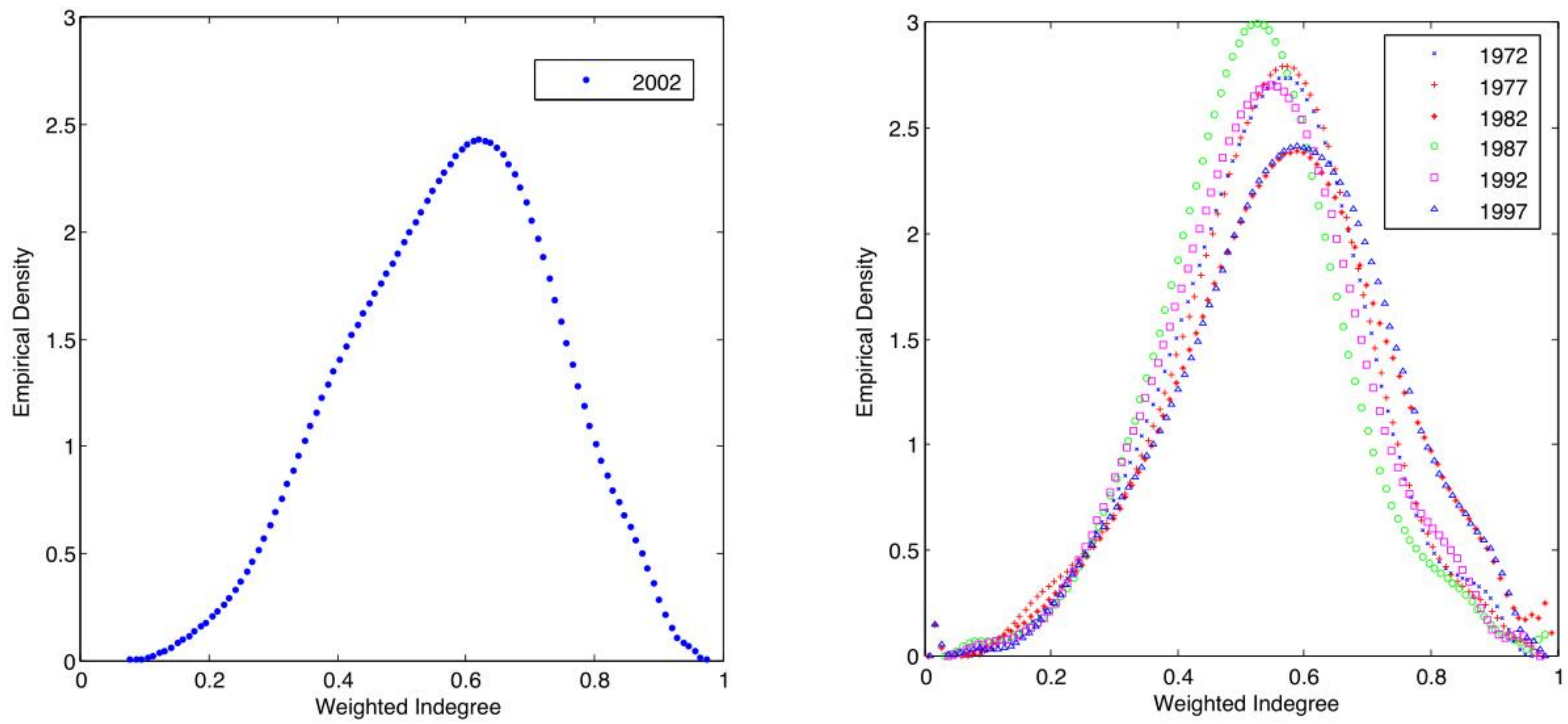


Figure 6: Empirical densities of intermediate input shares (indegrees)

· 大多数部门的投入密集程度都集中在平均值附近，71%的部门在平均投入份额的一个标准偏差之内

· 在我们的模型中，我们<u>假设所有部门的中间投入份额相同，都等于1-α，</u>与我们在美国数据中观察到的模式非常接近。

图6：中间投入份额的经验密度（指数）

一阶和二阶度的经验密度函数与累积分布函数

the variation in total intermediate input shares across commodities

· 2002年一阶度和二阶度经验密度的非参数估计值，可以看出一阶度和二阶度的经验分布是明显倾斜的，有厚重的右尾，分布的尾部都与幂律分布很好地近似

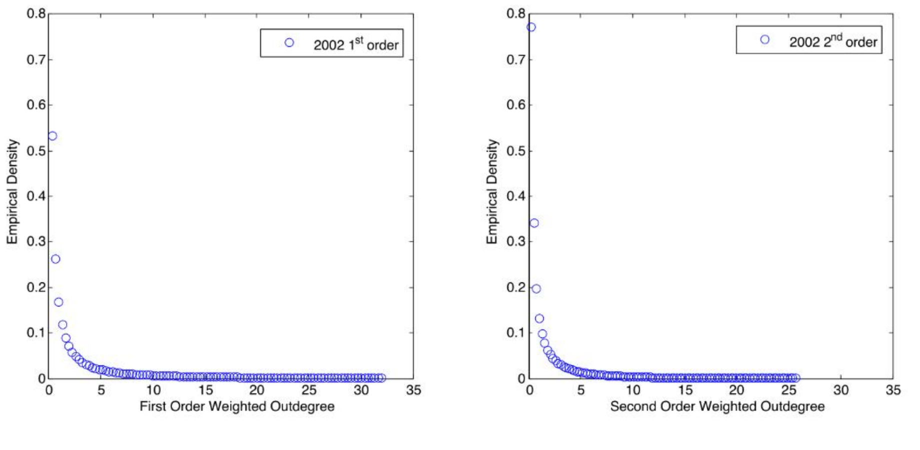


Figure 7: Empirical densities of first and second-order degrees

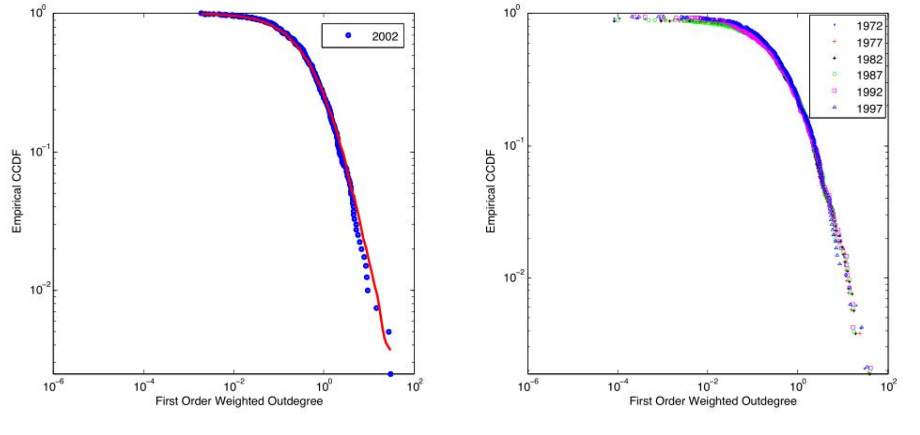


Figure 8: Empirical counter-cumulative distribution function of first-order degrees

· 由于一阶度和二阶度与幂律分布拟合的很好，因此作者前面的经济序列、经济体服从幂律分布这一假定得到了验证。

图7:一阶和二阶度的经验密度（2001），图8：一阶度的经验反累积分布函数（左2002，右1972-1997）

各种商品中间投入份额（每个部门加权指数）的变化

the variation in total intermediate input shares across commodities

TABLE I

OLS ESTIMATES OF β AND ζ[a]

	1972	1977	1982	1987	1992	1997	2002
$\widehat{\beta}$	1.38	1.38	1.35	1.37	1.32	1.43	1.46
	(0.20; 97)	(0.19; 105)	(0.18; 106)	(0.19; 102)	(0.19; 95)	(0.21; 95)	(0.23; 83)
$\widehat{\zeta}$	1.14	1.15	1.10	1.14	1.15	1.27	1.30
	(0.16; 97)	(0.16; 105)	(0.15; 106)	(0.16; 102)	(0.17; 95)	(0.18; 95)	(0.20; 83)
n	483	524	529	510	476	474	417

· 从表1中可以发现，对一阶参数的估计总是高于二阶。这表明在不同部门作为其他部门的直接或间接供应商时，即和一个有高点出度的行业共享供应商与和一个低点出度的行业共享供应商，影响是不同的，美国经济存在高度的不对称。

· 总体波动确实不会抵消掉。这与部门冲击和网络效应的相互作用导致相当大的总体波动的假设相一致。

表1:使用Gabaix和Ibragimov (2011)校正的β和ζ的OLS估计值

对网络效应定量范围的初步估计

preliminary estimates of the quantitative extent of these network effects.

01

· 制造业平均每个行业的产出标准差是0.058，美国的制造业有 459 个行业，而制造业的产值占 GDP 大概1/5

02

· 如果以$\sqrt{n}$的速度衰减，那么总体波动只占美国GDP 标准差的千分之一，可以忽略不计

03

· 如果考虑到产业间联系，衰减速度大概是$n^{0.15}$（从二阶度获得的标准偏差衰减率的下限），总体波动大概占美国GDP的标准差的2%，这就不是一个小数字了

PART 05

总　　结

多样化论点

宏观经济学认为，对企业或单个部门的微观经济冲击不会产生显著的总体波动，也就是总产出会以非常快的速度(√n)集中在其均值附近。

本文指出，在存在部门间投入-产出联系的情况下，经济中的多样化论点可能不适用，波动率衰减的速度取决于**部门间的网络结构。**

结论

- 本文研究了微观的经济冲击在投入—产出网中的**传导机制**，并刻画了不同生产部门联结性的结构特征对这种传导效应的的**影响程度**。
- 结果表明，当**供给部门存在不对称性结构**时（即**某些特定产业是更多部门的供给者**），微观的冲击并不会在加总中消失，而是会**引发宏观层面的经济波动**。

考虑**动态多部门经济类别**，部门之间网络结构可以解释美国经济的大部分观察到的部门**同步性和总波动性**。

一句话：个体行业在什么情况下是如何反映到总体冲击上的。