

第三讲 经济学中的函数和方程

樊潇彦

复旦大学经济学院

本讲主要内容

1. 基本函数

1.1 效用函数

1.2 生产函数

2. 常用方程

2.1 定义方程

2.2 行为方程

3. 应用

3.1 恩格尔定律

3.2 经济增长核算

3.3 国际金融中的汇率决定

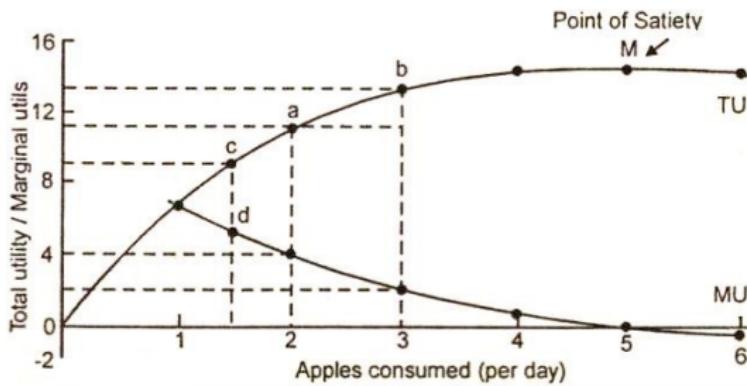
效用函数 (UTILITY FUNCTION) 的定义：一种商品

$$U = u(x), x \geq 0$$

- ▶ 消费的非饱和性 (non-saturated)，即边际效用 (marginal utility) 为正：

$$\frac{dU}{dx} = u'(x) > 0$$

- ▶ 边际效用递减 (diminishing marginal utility) : $\frac{du'}{dx} = u''(x) < 0$



Source: http://economicsconcepts.com/total_utility_and_marginal_utility.htm

效用函数 (UTILITY FUNCTION) 的定义：多种商品

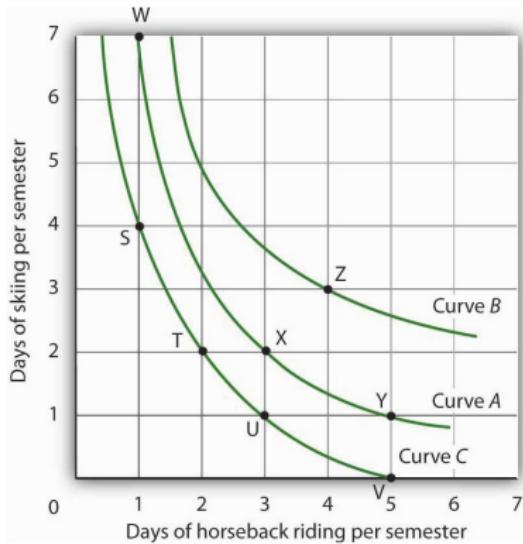
$$U = u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad x_i \geq 0$$

- 无差异曲线 (indifference curve) :

$$U_U < U_X = U_Y < U_Z$$

- 边际替代率 (Marginal rate of substitution) : 效用保持不变时, 每增加1单位 j 商品的消费所放弃的 i 商品的消费量。

$$MRS_{ij} = -\frac{dx_i}{dx_j}$$



效用函数的存在性定理 (MWG, 2001)

- ▶ (定义 1.B.1) 若偏好关系 \succsim 满足下面两个性质, 则称该偏好关系 \succsim 是理性的: (1) 完备性: 对于任意 $x, y \in X$, 我们有 $x \succsim y$, 或 $y \succsim x$, (或二者兼有, 即 $x \sim y$); (2) 传递性: 对于任意 $x, y, z \in X$, 如果 $x \succsim y$ 且 $y \succsim z$, 则有 $x \succsim z$ 。
- ▶ (定义 1.B.2) 若对于所有 $x, y \in X$, $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$, 则函数 $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为代表偏好关系 \succsim 的一个效用函数。
- ▶ (命题 1.B.2) 只有当偏好关系 \succsim 是理性的, 它才可以用一个效用函数来代表。
- ▶ (定义 3.C.1) 如果 X 上的偏好关系 \succsim 在极限下是被保持的, 即对于任意一个成对序列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, 如果 $x_n \succsim y_n$ 对于所有 n 均成立, 且 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 时有 $x \succsim y$, 则称该偏好关系 \succsim 是连续的。
- ▶ (命题 1.B.2) 假定 X 上的理性偏好关系 \succsim 是连续的, 则存在一个代表 \succsim 的连续效用函数。

效用函数的性质

- ▶ 偏好的单调性性质意味着效用函数递增。
- ▶ 偏好的凸性性质意味着效用函数拟凹。

拟凹函数的定义：对任意 $\lambda \in [0, 1]$ 和 $x_1, x_2 \in X$ ，有：

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$$

- ▶ 理性偏好的连续性只保证存在连续的效用函数，不保证效用函数的可微性，比如里昂惕夫偏好和效用函数都是连续的，但在拐点处不可微。一般我们假定效用函数二阶可微，且边际效用为正 $u' > 0$ 、边际效用递减 $u'' < 0$ 。

不确定性条件下的效用函数

考虑到人们对风险的厌恶和规避 (risk aversion),
阿罗和帕拉特提出了两种风险规避程度的测度指标
(Arrow-Pratt measure):

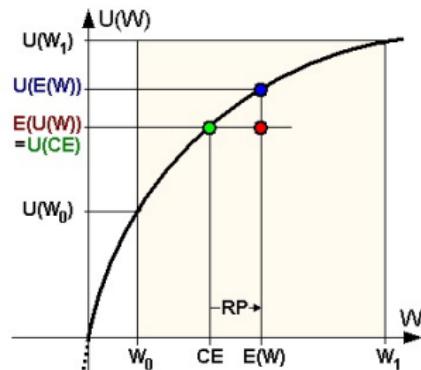
- ▶ 绝对风险规避 (absolute risk-aversion, ARA)

$$\alpha = -\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

- ▶ 相对风险规避 (relative risk-aversion, RRA)

$$\gamma = -\frac{cu''(c)}{u'(c)}$$

上述两种指标不变的效用函数分别称为常绝对风险规避 (CARA) 和常相对风险规避 (CRRA) 的效用函数。



Utility function of a risk-averse (risk-avoiding) person:
 CE - Certainty equivalent; $E(U(W))$ - Expected value of the utility (expected utility) of the uncertain payment; $E(W)$ - Expected value of the uncertain payment; $U(CE)$ - Utility of the certainty equivalent; $U(E(W))$ - Utility of the expected value of the uncertain payment; $U(W_0)$ - Utility of the minimal payment; $U(W_1)$ - Utility of the maximal payment; W_0 - Minimal payment; W_1 - Maximal payment; RP - Risk premium

效用函数的常用形式

1. Cobb - Douglas:

$$u(c) = \prod_{i=1}^N c_i^{\beta_i}$$

2. Stone - Geary:

$$u(c) = \prod_{i=1}^N (c_i - \underline{c}_i)^{\gamma_i}, \quad \gamma_i \geq 0$$

3. Exponential utility:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{-e^{-\alpha c}}{\alpha}, & (\alpha > 0) \\ c, & (\alpha = 0) \end{cases}$$

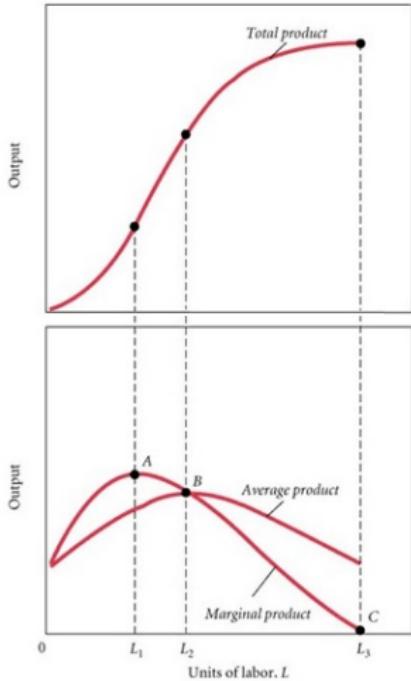
4. Power utility function:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & (\gamma > 0, \gamma \neq 1) \\ \ln c, & (\gamma = 1) \end{cases}$$

生产函数 (PRODUCTION FUNCTION)

$$Y = f(x_1, x_2 \dots x_N), \quad x_i \geq 0$$

- ▶ 边际产出 (marginal product) 为正:
$$\frac{dY}{dx} = f'(x) > 0$$
- ▶ 边际产出递减 (diminishing marginal product) : $\frac{df'}{dx} = f''(x) < 0$
- ▶ 边际产出由上到下穿过平均产出 (average product) $\bar{Y} = \frac{Y}{x}$ 的最高点。



Source: [https://en.wikipedia.org/
wiki/Production_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Production_function)

生产函数的常用形式

1. Leontief production function

$$Y = \min \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

2. Cobb - Douglas:

$$Y = \prod_{i=1}^N x_i^{\beta_i}, \quad (\beta_i > 0, \sum_{i=1}^N \beta_i = 1)$$

3. Constant elasticity of substitution (CES):

$$Y = \left[\sum_{i=1}^N a_i x_i^\rho \right]^{1/\rho}, \quad (\rho, a_i > 0, \sum_{i=1}^N a_i = 1)$$

定义方程

► 微观：

► 消费者预算约束：

$$\sum_{i=1}^N p_i c_i \leq W$$

► 厂商预算约束：

$$\sum_{i=1}^N p_i x_i \leq C$$

► 宏观：

► 国内生产总值：

$$Y = C + I + G + NX$$

► 长期预算约束：

$$-W_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{NX_t}{(1+r)^t}$$

行为方程：以消费为例

► 静态：消费者的商品需求： $c_i = \frac{\alpha W}{p_i}$

► 动态：

► 凯恩斯的消费理论：消费取决于当期收入水平。

$$C_t^K = C_0 + C_Y^K \cdot Y_t$$

► 莫里蒂亚尼的生命周期假说（LCH, Life Cycle Hypothesis）：各期消费取决于一生的总收入水平，一生的总消费等于总收入。

$$C_t^L = C_Y^L \cdot Y^L$$

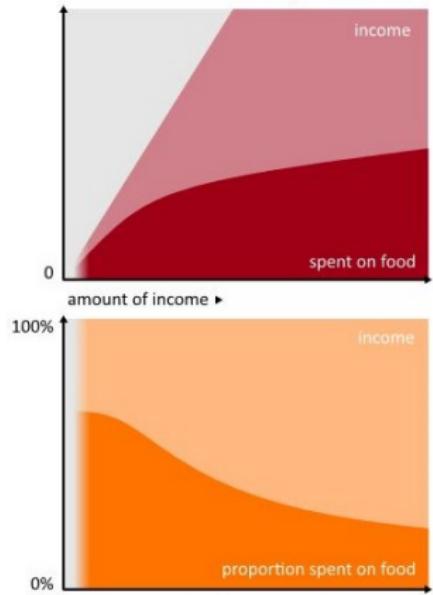
► 弗里德曼的永久收入假说（PIH, Permanent income hypothesis）：各期收入包括波动较大的暂时性收入和较为稳定的永久性收入 $Y_t = Y_t^T + Y_t^P$ ，消费只取决于永久性收入部分。

$$C_t^P = C_Y^P \cdot Y_t^P$$

恩格尔定律

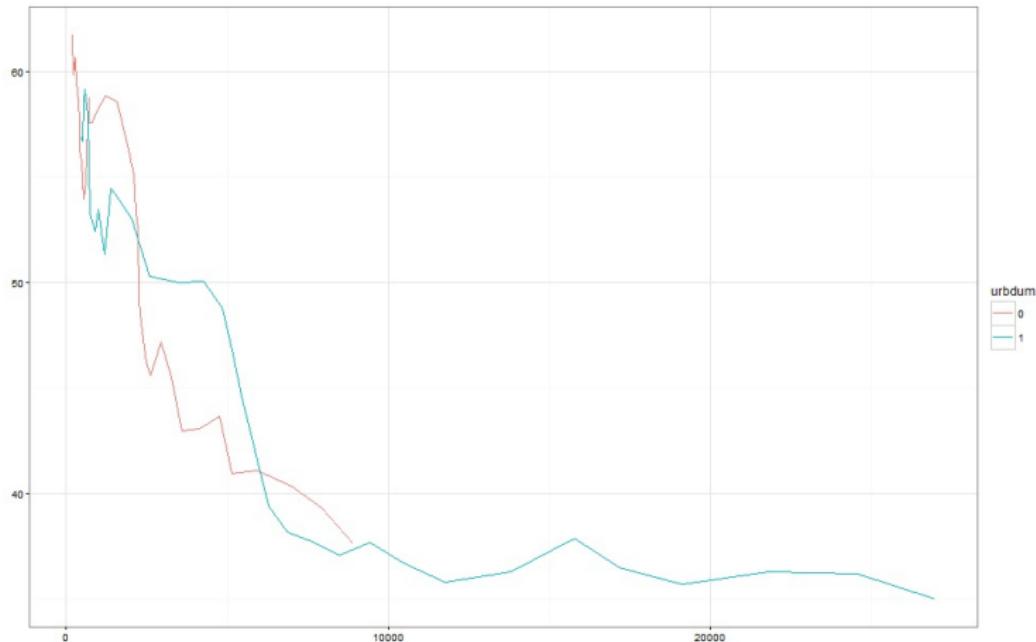
Wiki:

- ▶ Engel's law is an observation in economics stating that as income rises, the proportion of income spent on food falls, even if actual expenditure on food rises.
- ▶ The law was named after the statistician Ernst Engel (1821 - 1896).



Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Engel%27s_law

1978~2013年中国城乡居民家庭恩格尔系数



数据来源：国泰安“城乡居民家庭人均收入及恩格尔系数文件”。横轴单位元，纵轴单位%。

经济增长核算

- ▶ 增长的核算指的是将所采用的国民产出或人均产出增长率在业已发生变化并引起增长的决定因素之间进行分配，估计每一个决定产出的因素的既定变化对产出影响的大小，以及有关的估计。
- ▶ 对于柯布-道格拉斯形式的总量生产函数 $Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ ，记 $\dot{Y} = \frac{dY_t}{dt}$ ，有：

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \frac{\dot{L}}{L}$$

或者写为人均形式 ($x = \frac{X}{L}$)：

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha \frac{\dot{k}}{k}$$

- ▶ 广义的技术进步参数 A 包含了除要素投入之外所有影响产出的因素，因此也被称为**全要素生产率 (TFP, total factor productivity)**，技术进步率 $\frac{\dot{A}}{A} = g$ 则称为全要素生产率的增长率 (TFPG)。

JONES(2014): 美国经济增长核算

Growth Accounting for the United States

	1948–2011	1948–1973	1973–1995	1995–2007	2007–2011
Output per hour, Y/L	2.5	3.3	1.5	2.7	1.9
Contribution of K/L	0.9	0.9	0.7	1.1	1.1
Contribution of labor composition	0.2	0.2	0.3	0.2	0.4
Contribution of TFP, A	1.4	2.2	0.5	1.5	0.4

The table shows the average annual growth rate (in percent) for different variables.

Source: Bureau of Labor Statistics, *Multifactor Productivity Trends*.

Source: Table 6.2 in *Macroeconomics* by Jones(2014).

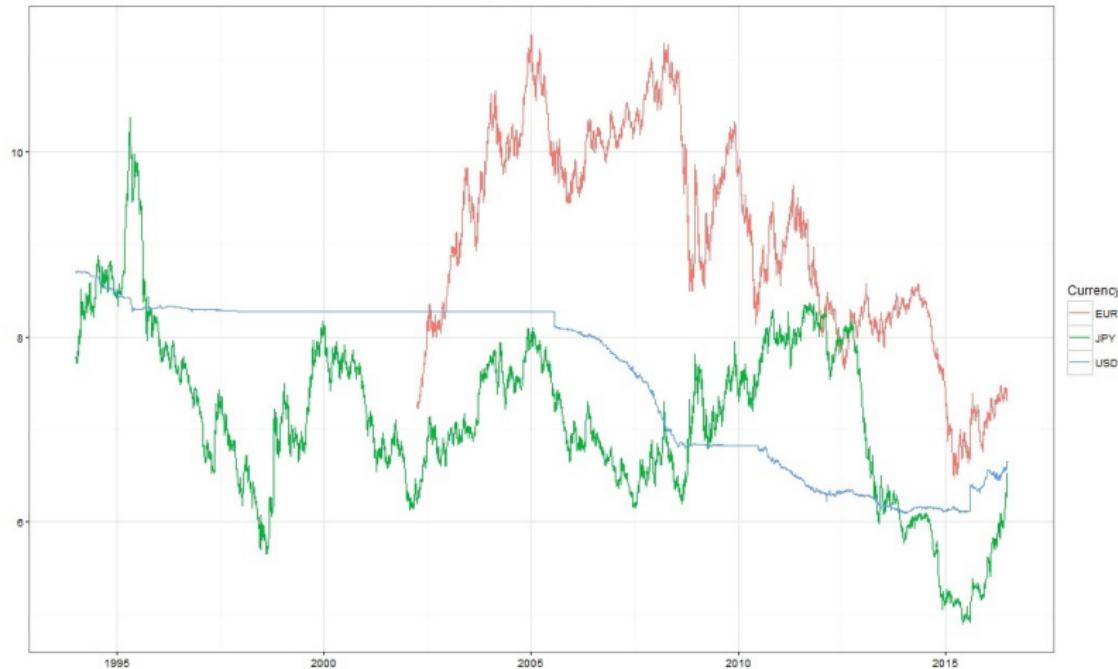
汇率基本概念

- ▶ 名义汇率 (exchange rate, E) 和实际汇率 (real exchange rate, e)
 - ▶ 名义汇率, 也称汇率, 是用一种货币表示的另一种货币的价格, 如 $E_{USD/RMB} = 6.3398$ 表示 1 单位美元等于 6.3398 单位人民币。
 - ▶ 实际汇率指 1 单位外国生产的商品可以交换多少单位本国生产的商品。
- ▶ 升值 (appreciation) 与贬值 (depreciation)

直接标价法下本币升值表现为汇率 E 的下降, 贬值为 E 的上升。不同时点货币的升 (贬) 值率为:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t}$$

人民币兑主要货币基准汇率

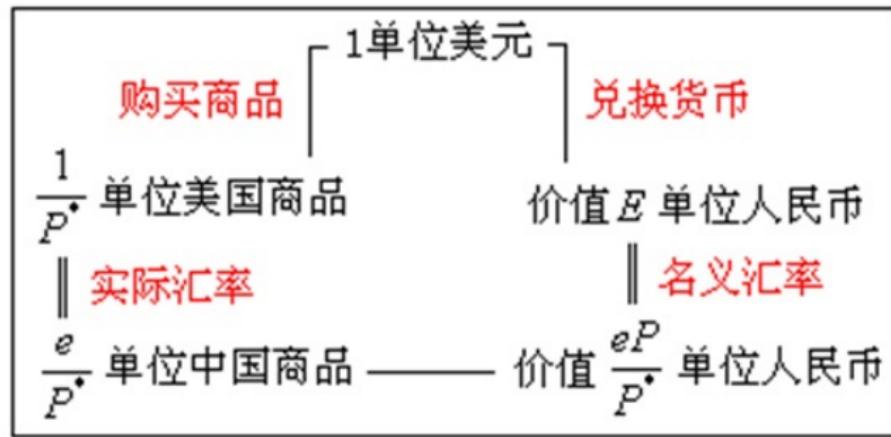


数据来源：国泰安“中国外汇市场研究数据库”。美元和欧元为1单位兑人民币，日元为100单位兑人民币。

汇率决定：购买力平价条件

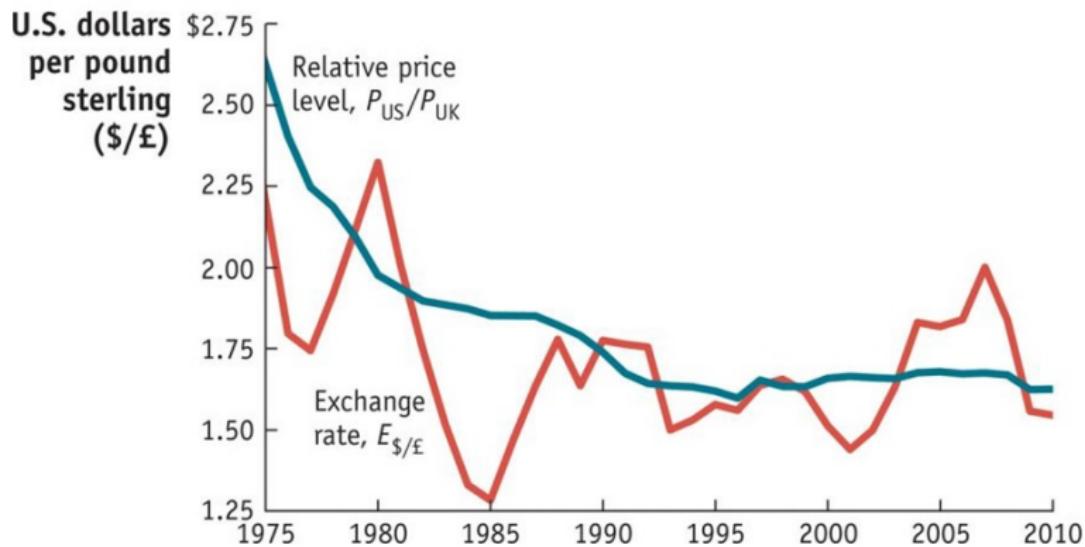
购买力平价（Purchase Power Parity, PPP）理论认为，货币的价值在于其购买力，因此当国际商品市场处于均衡状态时，汇率水平就取决于不同货币对“一揽子可贸易商品”的购买力之比。

$$E = \frac{eP}{P^*}$$



PPP条件的证据

短期来看，汇率显著偏离PPP理论的预测值，但长期来看，汇率变动趋势与理论预测一致。



Source: Feenstra and Taylor(2014).

汇率决定：利率平价条件

利率平价 (Interest-rate Parity, IP) 理论认为，用不同货币计价的金融资产可以提供相同的预期收益率时，外汇市场处于均衡状态，下述IP条件成立：

$$\frac{E^f}{E} - 1 = i - i^*$$



IP条件的近似

$$1 + i = \frac{E^f}{E} (1 + i^*)$$

$$\frac{E^f}{E} - 1 = \frac{1+i}{1+i^*} - 1 = \frac{i-i^*}{1+i^*}$$

$$\left(\frac{E^f}{E} - 1 \right) (1 + i^*) = \frac{E^f}{E} - 1 + \left(\frac{E^f}{E} - 1 \right) i^* = i - i^*$$

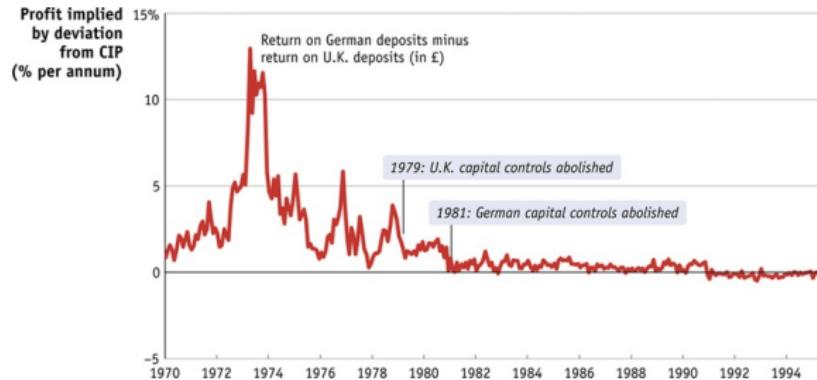
$$\underbrace{\frac{E^f}{E} - 1}_{\text{Expected rate of depreciation}} \approx \underbrace{i - i^*}_{\text{Interest rate gap}}$$

IP条件的证据

如果市场价格偏离IP条件，投资者将获得无风险套汇收益：

$$\text{Profit} = \frac{E^f}{E} (1 + i^*) - (1 + i)$$

外汇市场如果存在资本管制，IP条件将无法满足；而一旦取消管制、实行金融自由化，市场力量将使IP条件成立。



Source: Feenstra and Taylor(2014).