A Network Approach to Public Goods

Matthew Elliott

Benjamin Golub

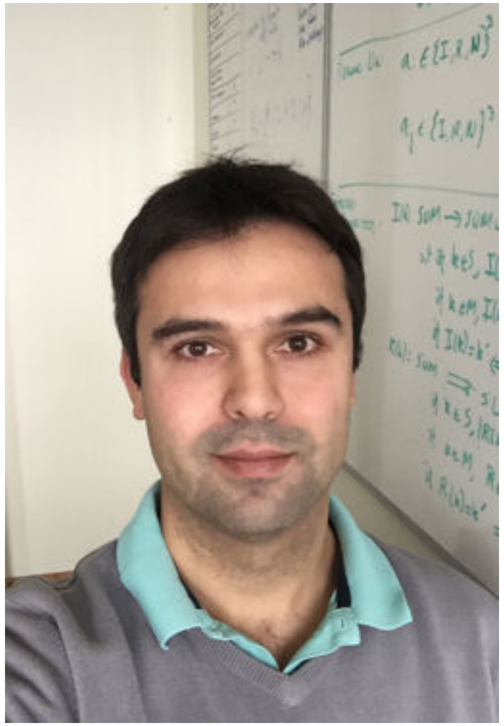
汇报人：陈辉煌、程逸敖、屠鸿捷、徐尔瀚、余一明

June 2020

TIPS：报告食用指北

Part	Content	PPT	Video	Paper	Appendix
Introduction 陈辉煌	• 作者介绍	P03	00:00-01:11	/	
	• 文章研究问题	P04	01:11-02:54	P730-732	
	• 文章思路	P05	02:54-05:14	P733-736	
Framework 徐尔瀚	• 模型的基本设定	P06-07	05:14-07:45	P736-738	
	• 邻接矩阵谱半径与帕累托最优的关系	P08-10	07:45-09:40	P738-741	Appen A
	• 如何寻找网络中的关键人物	P11-12	09:40-12:31	P741-744	
Lindahl - I 屠鸿捷	• 什么是林达尔均衡结果	P13-14	12:31-15:03	P744-746	
	• 林达尔均衡结果与特征向量中心性的关系	P15-18	15:03-19:11	P746-748	Appen B
Lindahl - II 余一明	• 能实现林达尔均衡的博弈机制	P19-21	19:11-20:43	P748-749	Appen C.1
	• 这种机制所产生均衡的稳定性	P22	20:43-21:36	P749-750	Appen C.2
	• 博弈中是否可能出现打破林达尔均衡的小群体	P23	21:36-22:30	P750-751	Appen C.3
Application 程逸敖	• 相对投入与相对收益	P24-28	/	P752-753	Appen D.1
	• 加入新成员问题	P29-31	22:30-25:29	P753-755	
	• 划分若干小组分别协商的问题	P32-35	25:29-30:00	P760-761	Appen D.2

作者：合作



- **Financial Networks and Contagion**
  American Economic Review (2014)
  Matthew Elliott, Benjamin Golub & Matthew O. Jackson.

- **A Network Approach to Public Goods**
  Journal of Political Economy(2019)
  Matthew Elliott and Benjamin Golub

- **Supply Network Formation and Fragility**
  (2020)Cambridge Working Papers in Economics
  Elliott, M., Golub, B. and Leduc, M. V.

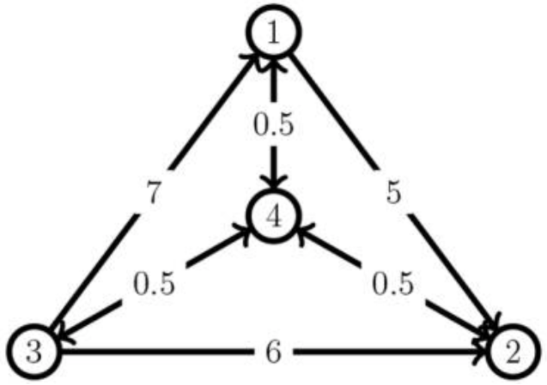
Matthew Elliott
University of Cambridge

Benjamin Golub
Harvard University

研究问题：Network Approach to Public Goods

- 网络：相互联结

Motivation!
（视角、分析工具）



- 公共物品 ------------ 外部性 ------- 异质外部性
  - 如何传导？
  - 均衡结果？

文章路线

- 例子
  - 网络：成员收益相互影响的团队
  - “公共物品”供给：成员付出的努力

1. 帕累托有效结果？⇐ 如何刻画：最大特征值
2. “更好的结果”？⇠“林达尔结果”
   ⇐ 如何实现：特征向量中心性
3. 应用：关键人物？协商接纳新成员？

框架:模型的基本设定

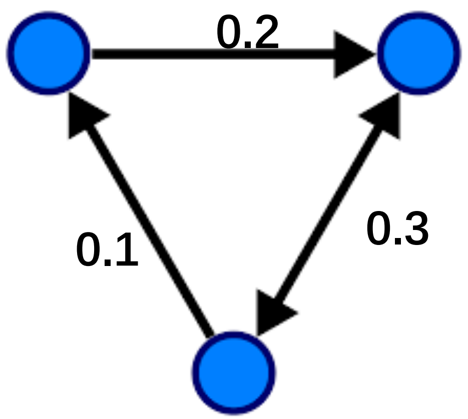
- n个玩家，记为$\mathrm{i} = 1,2,3,\dots,n$
- i 提供的公共服务，或曰“行动”记为$a_i \in \mathbb{R}_+$
- 记某个行动方案为 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2 \cdots a_n) \in \mathbb{R}_+^n$
- i 的效用函数记为 $u_i(\boldsymbol{a})$，是一个n元数值函数， $u_i(\boldsymbol{a})$是凹函数，连续可微

假设：以效用函数的偏导数为权值的图

1. （非负外部性）$\frac{\partial u_i(\boldsymbol{a})}{\partial a_j} \geq 0, \mathrm{i} \neq j$
2. （提供服务需要成本）$\frac{\partial u_i(\boldsymbol{a})}{\partial a_i} < 0$
3. （强连通性）对 $N = \{1,2,3,\dots,n\}$做一个划分$\{M, \overline{M}\}$
   则对于 $\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^n, \exists\, i \in M, j \in \overline{M}, \frac{\partial u_i(\boldsymbol{a})}{\partial a_j} > 0$

4. （改进有限性）下面的集合不是无限的：* $\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^n \mid \exists\, s > 1, s.t. s\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{a}\}$

插曲：图论的基础知识



不加权邻接矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

加权邻接矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

✓ **强连通性：** 对于一个有向图，从任一节点出发，都能按照有方向的路径通向任一其他节点。

加权标准化邻接矩阵（边际收益矩阵）：

$$B_{ij}(\mathbf{a};\mathbf{u}) = \begin{cases} \dfrac{J_{ij}(\mathbf{a};\mathbf{u})}{-J_{ii}(\mathbf{a};\mathbf{u})} & \text{if } i \neq j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中，$J_{ij}(\mathbf{a};\mathbf{u}) = \partial u_i(\mathbf{a})/\partial a_j$

谱半径 $r(\mathbf{M}) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ is an eigenvalue of } \mathbf{M}\}$

谱半径：挖掘矩阵中的潜在信息

***Proposition 1*：邻接矩阵的谱半径与帕累托最优的关系**

在假设1-3的情况下，若$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_{++}$有：

$$r(\mathbf{B}(\mathbf{a})) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{a} \text{ is a Pareto Efficiency profile}$$

在假设1-2的情况下，对于无行动的行动方案$\mathbf{0}$，*

$$r(\mathbf{B}(\mathbf{0})) \leq 1 \Leftrightarrow \mathbf{0} \text{ is a Pareto Efficiency profile}$$

*证明见附录

证明：以形象的形式

记 $\rho = r(\mathbf{B}(\mathbf{a}))$，由Perron-Frobenius引理*，一定可以找到一个 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n_{++}$，满足 $\mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{d} = \rho\mathbf{d}$，例如：

$$\begin{bmatrix} 0 & -J_{12}/J_{11} & -J_{13}/J_{11} \\ -J_{21}/J_{22} & 0 & -J_{23}/J_{22} \\ -J_{31}/J_{33} & -J_{32}/J_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

我们选取其中一行处理：

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial a_1} d_1 + \frac{\partial u_1}{\partial a_2} d_2 + \frac{\partial u_3}{\partial a_1} d_3 = 0$$

$$\rho > 1, \partial u_i / \partial a_i < 0, \nabla u_i(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{d} = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial a_j} d_j > 0$$

于是我们只要在原行动方案上<u>加上</u>与 $\mathbf{d}$ 成比例的一点努力，就构造出了一个帕累托改进。

反思：数学证明背后的经济学思想

一个谱半径为1的矩阵，其同时也有一个等于1的左特征值。于是，

$\exists\theta,\ s.t.\theta\mathbf{B}(\mathbf{a}^*)=\theta$ 即有 $\theta\mathbf{J}(\mathbf{a}^*)=\mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial a_1} & \frac{\partial u_1}{\partial a_2} & \frac{\partial u_1}{\partial a_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial a_1} & \frac{\partial u_2}{\partial a_2} & \frac{\partial u_2}{\partial a_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial a_1} & \frac{\partial u_3}{\partial a_2} & \frac{\partial u_3}{\partial a_3}\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

这恰好是一个网络内，以 θ 为权重的的总体效用最优化问题

$$\max_{\mathbf{a}}\sum_i\theta_i u_i(\mathbf{a})$$

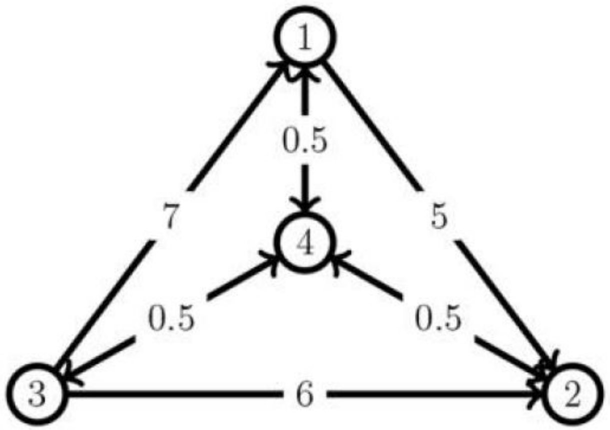
的一阶条件。

牛刀小试：找出网络中的关键人物

*我们判断一个玩家是否在网络中关键，就看去掉他后，这个网络的性质是否发生了什么根本性的变化。

我们定义去掉第 i 行、第 i 列的 $\mathbf{B}(\mathbf{0})$ 为 $\mathbf{B}^{[-i]}(\mathbf{0})$
如果 $r(\mathbf{B}(\mathbf{0}))>1$ 且 $r(\mathbf{B}^{[-i]}(\mathbf{0}))\leq 1$ ，
那么，i 便是一个关键人物。

$$\mathbf{B}(\mathbf{0})=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0.5 \\ 5 & 0 & 6 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$



牛刀小试：进一步的数学和解读

谱半径与邻接矩阵对应的图中的循环数存在关系。

$$\mathbf{M} \geq \mathbf{0},\ r(\mathbf{M}) = \lim_{l\to\infty} \sup\{\underline{tr(\mathbf{M}^l)}\}^{\frac{1}{l}}$$

若$\boldsymbol{M}$是不加劝邻接矩阵，该部分等于有向图中步长为$\boldsymbol{l}$的循环的个数，若加权，则还含有循环强度的信息。

谱半径大于1，则图中步长为无穷的循环无穷多
存在玩家4时，循环很多；没有玩家4，就没有循环。

III. 引入：我们为什么要关注林达尔结果？

- **提出**：Arrow, Lindahl (1969)
- **思想**：
  - ✓ 公共产品理论最早的成果之一
  - ✓ 引入“价格”填补市场缺失的问题
  - ✓ 林达尔认为公共产品价格并非取决于某些政治选择机制和强制性税收，而是每个人都面临着根据自己意愿确定的价格，并均可按照这种价格购买公共产品总量。
- **一类特殊的帕累托均衡**：
  - ✓ 保证每个人都不会入不敷出
  - ✓ 针对每个个体的最优化问题
- **均衡结果**
  - ✓ 每个成员按照其所获得的公共物品边际效益的大小，来捐献自己应当分担的公共物品的资金费用，则公共物品供给量可以达到具有效率的最佳水平。

III. 定义：林达尔结果

- **符号：**

P_{ij} (i ≠ j)：对j每单位的行动，i付给j的价格

Q_{ij} (i ≠ j)：上述价格下，i购买了几单位j的行动

i的总支出：$\sum_j P_{ij}Q_{ij}$

i的总收入：$\sum_j P_{ji}Q_{ji}$

- **定义：** **林达尔结果 a^***

$$u_i(a^*) \geq u_i(a) \quad \text{（对每一个i）}$$

$$s.t. \sum_{j:j\neq i} P_{ij}a_j \leq a_i \sum_{j:j\neq i} P_{ji}$$

- **市场出清：**

个体i (i ≠ j) 对每个j的行动的需求恰好等于j的行动

👉 $Q_{ij} = a_j \ (i \neq j)$

- **预算约束：**

总支出小于等于总收入

👉 $\sum_{j,i\neq j} P_{ij}Q_{ij} \leq \sum_{j,i\neq j} P_{ji}Q_{ji}$

即：在满足市场出清、预算约束条件的行动方案中，使得每一个个体效用均为最优的那个行动方案

III. 定义：特征向量中心性

➢ **定义：特征向量中心性**

满足 $\mathbf{B(a)a = a, a \neq 0}$，称 **a** 是具有特征向量中心性的行动策略

➢ 含义：一个节点的重要性

取决于其邻接节点的数量

以及其邻接节点的重要性

👉 $EC(i) = x_i = c\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,$

👉 $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$

即：$\lambda x = Ax$ 其中，$c = \lambda^{-1}$

PAGERANK：GOOGLE的法宝

Wiki: The PageRank values are the entries of the dominant right eigenvector of the modified adjacency matrix.

$v_j = \sum_i a_{ij} v_i$

$v = Av$

III. THEOREM 1证明： $\Leftarrow$

➢ **THEOREM 1**

对$a \in R_+^n$， a具有中心性 $\Leftrightarrow$ a是林达尔结果

$$u_i(a^*) \geq u_i(a)$$
$$s.t. \sum_{j \in N} P_{ij} a_j \leq 0$$

“$\Leftarrow$”

- **LEMMA 2** 如果 $a^* \neq 0$ 对于效用 u 是一个林达尔结果，那么有：$a^* \in \mathbb{R}_{++}^n$

Assumption 3 强连通性 ➡ a^*为内点解 ➡ $\frac{P_{ij}}{P_{ik}} = \frac{J_{ij}(a^*)}{J_{ij}(a^*)}$

⬇

$P_{ij} > 0$ $(i \neq j)$ ➡ 预算约束取等 ➡ $Pa^* = 0$

$J(a^*)a^* = 0$

⬇

$B(a^*)a^* = a^*$

III. THEOREM 1证明： $\Rightarrow$

➢ THEOREM 1

对a $\in R_+^n$， a具有中心性 $\Leftrightarrow$ a是林达尔结果

“$\Rightarrow$” **由中心性：** $\mathrm{B}(a^*)a^* = a^*$ **再由P-F定理：** $\mathrm{B}(a^*)$谱半径为1

回顾： $\exists\theta, s.t.\theta\mathrm{B}(\mathrm{a}^*) = \theta$ 即 $\theta\mathrm{J}(\mathrm{a}^*) = \mathbf{0}$

👉 a^*满足 $\max\limits_{a}\sum_i \theta_i u_i(a)$

#一个网络内以θ 为权重的的总体效用最优化问题（见PPT-12）

⭐**猜测：** 林达尔价格P_{ij}满足 $P_{ij} = \theta_i J_{ij}(a^*)$，其中i $\neq j$

- ✓ 考虑个体最优化$\mu_i P_{ij} = J_{ij}(a^*)$， μ_i为拉格朗日乘子
- ✓ 考虑整体最优化，使μ_i θ_i 为常数

P_{ij} 与$\theta_i J_{ij}(a^*)$成正比

III. 后续：结论的作用？

➢ THEOREM 1

对$\mathbf{a} \in \boldsymbol{R}_{+}^{n}$， a具有中心性 $\Leftrightarrow$ a是林达尔产出

启示	
1	林达尔结果a是帕累托有效的 👉为福利经济学第一定律提供了证据
2	林达尔均衡的存在性

✓ **福利经济学第一定律：**经济主体的偏好被良好定义的条件下，带有再分配的价格均衡都是帕累托最优的。

基于博弈论说明林达尔均衡的形成

我们已经证明，当n维行为向量$\boldsymbol{a}$满足$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$时，$\boldsymbol{a}$必定为一个林达尔均衡且帕累托最优。

但是我们还没有说明这个均衡是否能够形成。接下来用博弈论的有关知识分析。

三个问题

假定信息充分，博弈各方相互知道对方偏好。

1. 什么样的博弈机制最终能实现林达尔均衡?

2. 这样的机制产生的均衡是稳定的吗?

3. 博弈中可能出现打破林达尔均衡的小群体吗?

1. 什么样的博弈机制最终能实现林达尔均衡？

N人讨价还价博弈：

参与者1提出n个人分别采取的行为，参与者2对此表态。

参与者2若同意，时期不变，参与者3表态。

参与者2若不同意，则提出自己的方案，向后顺延一时期，参与者3表态。

以此类推直到出现所有人都同意的方案。跨时期贴现率为δ。

通过该博弈产生的行为组合满足林达尔均衡。（证明见附录）

2. 这样的机制产生的均衡是稳定的吗？

可以证明林达尔均衡是**稳定**的。 （证明见附录）

若满足以下四个条件，则该均衡是稳定的：
①该均衡满足帕累托最优。
②该均衡满足纳什均衡。
③该均衡在个体层面上满足理性人假设。
④形成该均衡的将偏好映射到行为上的函数是上连续的。

3. 博弈中可能出现打破林达尔均衡的小群体吗？

可以证明，满足林达尔均衡的行为组合中**不存在偏离动机**。（证明见附录）

①不存在一种可能发生的行动，在这种行动组合中除了博弈者内部的某些成员外，其它成员选择不行动。

②不存在博弈者内部的某些成员，这些成员中的一部分强偏好于另一行动方案，或是这些成员全体均弱偏好于另一行动方案。

Application1: A Deeper Analysis to Lindahl Action

1. A Deeper Analysis to Lindahl Action

什么因素 $\longrightarrow$ $\boldsymbol{a}^{\star}$

Proposition 3

Let $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})^T$, and assume that this matrix is aperiodic. Then $\boldsymbol{a}$ has the centrality property if and only if, for every i and j,

$$\frac{a_i}{a_j} = \lim_{\ell \to \infty} \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}_i^{\downarrow}(\ell; \boldsymbol{M})} v(w; \boldsymbol{M})}{\sum_{w \in \mathcal{W}_j^{\downarrow}(\ell; \boldsymbol{M})} v(w; \boldsymbol{M})} \tag{1.1}$$

注：未出现在录屏中 供大家参考

Application

Walk

对于一个非负矩阵M，定义通路(walk)：
若一个序列(w(1),w(2),…,w($\ell+1$))满足对任意t=1, 2, ⋯ℓ成立$M_{w(t)w(t+1)} > 0$，则称该序列为M的一通条路。

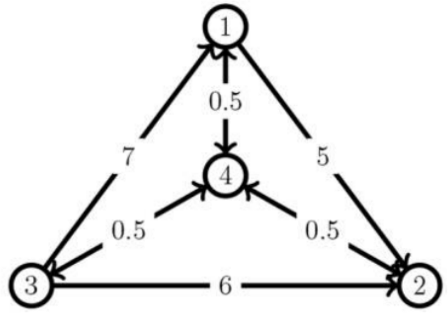
- 其中称w(1)为起点，w($\ell+1$)为终点，ℓ为通路的长度

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0.5 \\ 5 & 0 & 6 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Example.

- B_{13}=7 ⟹ (1, 3) 就是矩阵B的一条通路

- 这里通路允许重复经过某些点，循环就是特殊的通路，如(1, 3, 4, 1, 3, 4, 1)



注：未出现在录屏中 供大家参考

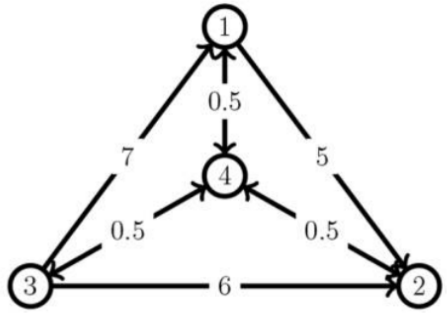
Application

Walk

考虑收益矩阵中的通路

令$M = B^T$，此时M_{ij}表示的是i对j带来的福利

- 转置之后所有的通路反向，如$(3,1)$是矩阵M的一条通路



- 在M中的通路即可理解为一条收益链(a chain of benefit flows)
- 即起点w(1)通过这样一条通路将自身提供的公共品的福利（外部性）传递到终点$w(\ell+1)$

$$M = \boldsymbol{B}(\mathbf{0})^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 7 & 6 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

注：未出现在录屏中 供大家参考

Application

The value of the walk

$$\mathrm{v}(w; M) = \prod_{t=1}^{\ell} M_{w(t)w(t+1)}$$

- 这个价值衡量了一条收益链具体传递的福利的大小
- 具体含义：当w(1)额外提供1单位公共品时，w(ℓ + 1)通过该收益链得到了好处后自己愿意额外提供的公共品的数量

注：未出现在录屏中 供大家参考

Application

Proposition 3

Let $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})^T$, and assume that this matrix is aperiodic. Then $\boldsymbol{a}$ has the centrality property if and only if, for every i and j,

$$\frac{a_i}{a_j} = \lim_{\ell \to \infty} \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}_i^{\downarrow}(\ell; \boldsymbol{M})} v(w; \boldsymbol{M})}{\sum_{w \in \mathcal{W}_j^{\downarrow}(\ell; \boldsymbol{M})} v(w; \boldsymbol{M})} \tag{1.1}$$

Note. $\mathcal{W}_{\mathrm{i}}^{\downarrow}(\ell; M)$表示所有长度为$\ell$，终点为i的通路的集合

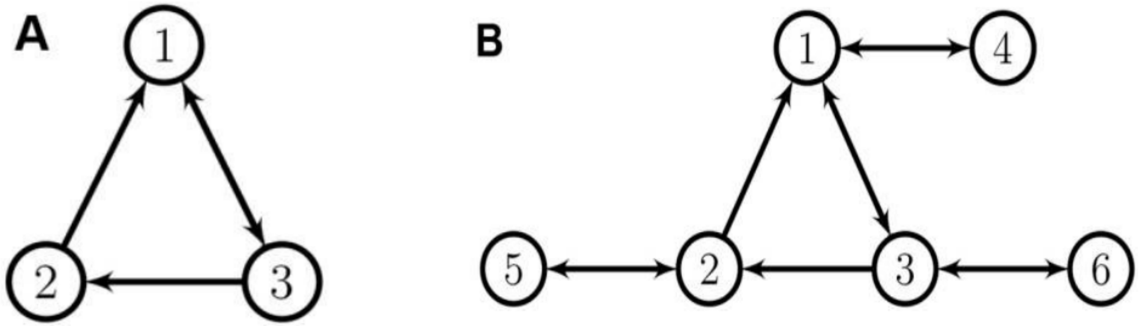
含义：

- 影响个体在林达尔均衡下的相对投入水平的是他收到福利的相对大小而不是他给予其他人福利的大小
- 进一步，若个体i从个体j获得的好处永久性地（或外生性地）增加了（即与投入无关），那么在林达尔均衡下i相对于其他个体的投入将会增加
- 再进一步，若个体i能够给其他参与者带来大量的福利（直接的和间接的），那么如果外生性地提高该个体收到的福利，将会提升林达尔均衡下整体的福利

注：未出现在录屏中 供大家参考

Application2: Admitting a New Team Member

2. Admitting a New Team Member



原始成员：N={1,2,3}；

待加入成员：M={4,5,6}；

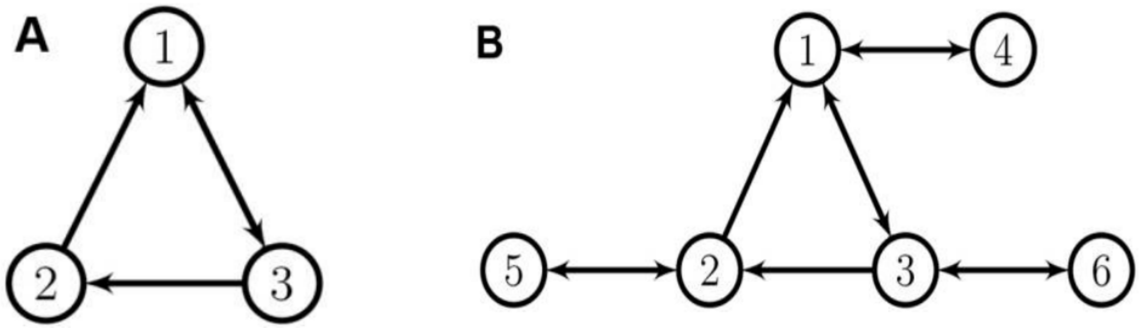
情景：N中的三个成员将讨论是否接纳一位新成员

结果：三人达成共识接纳某一成员or三人达成共识不接纳新成员or三人未能达成共识

- 假定原始成员外部性较大，而新成员的外部性较小；
- 效用函数：$u_i(a) = \sum_{j\in \mathrm{N}, j\neq i} \mathrm{G}_{ij} \log(1 + a_j) + \sum_{j\in M, j\neq i} \frac{G_{ij}}{4} \log(1 + a_j) - a_\mathrm{i}$；
- G在这里是不加权的邻接矩阵

Application

Admitting a New Team Member



第一直觉：每个人都会选择能给自己带来直接的福利的新成员（1-4，2-5，3-6）

定性分析：3是唯一一个能够同时带给另两个原始成员直接福利的（1无法给2，2无法给3）。联系Proposition 3，选择接纳6使其给3带来直接的福利，会提高3公共品的提供量，从而同时带给1和2福利使其也提高投入。而4和5的加入效果将不如6.

Application

Admitting a New Team Member

定量分析:

Lindahl action：

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} .408 \\ .225 \\ .290 \\ — \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}' = \begin{pmatrix} .523 \\ .256 \\ .343 \\ .343 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}'' = \begin{pmatrix} .462 \\ .286 \\ .316 \\ .222 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}''' = \begin{pmatrix} .497 \\ .279 \\ .386 \\ .279 \end{pmatrix}.$$

Utility：

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} .049 \\ .030 \\ .052 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}(\mathbf{a}') = \begin{pmatrix} .074 \\ .040 \\ .077 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}(\mathbf{a}'') = \begin{pmatrix} .064 \\ .039 \\ .064 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}(\mathbf{a}''') = \begin{pmatrix} .076 \\ .048 \\ .078 \end{pmatrix}.$$

结果：达成共识，6将加入！

Note. 从左到右依次为无人加入，4加入，5加入，6加入

Discussion: Subdividing the Negotiation into Smaller Groups

Approximating the Full Benefits of Negotiation with Smaller Groups

通常让所有参与者一起参与协商是成本巨大的，那是否能划分为若干小组分别协商（小组协商的目的是最大化小组整体福利）而仍然达到林达尔均衡的福利水平

首先在无任何干预的情况下，原林达尔均衡下的投入水平对于小组来说不是帕累托最优的。

这是因为在林达尔均衡下小组内的投入水平产生的一部分外部性（好处）由其他组的成员获得的，但小组成员要承担投入的所有成本，因此对小组来说原先的林达尔均衡投入存在福利的损失，结果是各小组都将通过降低投入来提升小组整体福利。

Discussion

Approximating the Full Benefits of Negotiation with Smaller Groups

- 那么考虑一个总体的planner（以最大化总体福利为目标）能否通过适当的措施使得在小组协商的前提下仍然达到林达尔均衡时的福利水平？
- 从planner的立场出发，能够实行的措施是为各个参与者的投入提供补贴。通过补贴可以使参与者们愿意提供更多的公共品

- 考虑最简单的情形，所有参与者被划分为两组M和M^C，每个小组只考虑组内成员的福利
- a^*是原林达尔均衡下的投入水平（同时也是planner想要实现的）
- 不失一般性，可令$J_{ii}=-1$以使表达形式简洁
- 新的效用函数：$\tilde{u}_i(\boldsymbol{a})=u_i(\boldsymbol{a})+m_i(a_i)$, 其中$m_i\geq 0$

$$\tilde{J}_{ij}=\begin{cases}-1+m_i' & ,j=i\\ J_{ij} & ,i,j\in M\text{或}i,j\in M^C,\text{且}j\neq i\\ 0 & ,i\in M,j\in M^C\text{或}i\in M^C,j\in M\end{cases}$$

Discussion

Approximating the Full Benefits of Negotiation with Smaller Groups

这里直接给出一种可行的补贴方案：

$$\text{对 } i \in M, m_i = \sum_{j \in M^C} \frac{\theta_j}{\theta_i} \boldsymbol{B_{ji}}(\boldsymbol{a}^\star) a_i\text{，对 } i \in M^C, m_i = \sum_{j \in M} \frac{\theta_j}{\theta_i} \boldsymbol{B_{ji}}(\boldsymbol{a}^\star) a_i$$

只需验证：$(\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}}, \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}^C}) \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{M}}}(\boldsymbol{a}^\star) & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{M}^C}}(\boldsymbol{a}^\star) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$

Discussion

Approximating the Full Benefits of Negotiation with Smaller Groups

- Proposition 5:

Consider a Pareto efficient outcome $\boldsymbol{a}^\star$, and let $\boldsymbol{\theta}$ be the corresponding Pareto weights. Then,

$$c_M(\boldsymbol{a}^\star) \leq \sum \frac{\theta_i}{\theta_j} B_{ij}(\boldsymbol{a}^\star) a_j^\star, \qquad (1)$$

where the summation is taken over all ordered pairs (i,j) such that one element is in M and the other is in M^C.

含义：当两个小组之间的影响很小(B_{ij})时，planner的补贴成本是可以很小的