# A Network Approach to Public Goods

## —— Appendix ——

Group 8

陈辉煌 程逸敖 屠鸿捷 徐尔瀚 余一明

---

## Contents：

# Appendix A.  Framework

***Perron-Frobenius*引理** 设$\mathbf{M}$是一个$n$维不可约方阵，且$\mathbf{M} \geq \mathbf{0}$，并记其谱半径为$r(\mathbf{M})$，则：
(1)$r(\mathbf{M})$是$\mathbf{M}$的特征值.
(2)$\exists \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $s.t. \mathbf{Mp} = r(\mathbf{M})\mathbf{p}$.
(3)若$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $s.t. \mathbf{Mv} = q\mathbf{v}$其中$q \in \mathbb{R}$，那么 $\mathbf{v} = k\mathbf{p}(k > 0)$且$q = r(\mathbf{M})$.

**补充定义** 定义$\Delta_n := \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_i d_i = 1\}$.
定义物有所值向量 $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{d})$为：

$$b_i(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \frac{\sum_{j:j\neq i} J_{ij}(\mathbf{a})d_j}{-J_{ii}(\mathbf{a})d_i} = \frac{i's\, marginal\, benefit}{i's\, marginal\, cost}$$

***Proposition 6*** 在任一行动方案$\mathbf{a}$下，存在唯一的一个方向$\mathbf{d}^*(\mathbf{a})$，使得

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{d}^*(\mathbf{a})) = r(\mathbf{B}(\mathbf{a}))\mathbf{1}$$

其中$\mathbf{1}$是一个$n$维全为1的列向量.
证明：
由$\mathbf{B}(\mathbf{a})$是一个不可约非负的方阵，由Perron-Frobenius引理知存在且仅存在一个$\mathbf{d} \in \Delta_n$，满足

$$\mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{d} = r(\mathbf{B}(\mathbf{a}))\mathbf{d} \Leftrightarrow \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = r\mathbf{1}$$

***Proposition 1***(part b)： $r(\mathbf{B}(\mathbf{0})) \leq 1 \Leftrightarrow \mathbf{0}$ is a Pareto efficient outcome.

证明： i)充分性：若$r(\mathbf{B}(\mathbf{0})) > 1$，则根据*Proposition 6*，存在$\mathbf{d}^*$满足$d_i^* = r(\mathbf{B}(\mathbf{0}))$，这是一个帕累托改进。

ii)必要性：假设$\mathbf{0}$不是帕累托最优的状态，那么必然存在至少一个行动方案$\mathbf{a}_1$，使得$\mathbf{u}(\mathbf{a}') \geq \mathbf{u}(\mathbf{0})$，且不等号在某些$i$处严格成立。事实上，在假设3成立的情形下，可以进一步找到一个$\mathbf{a}'' > \mathbf{0}$，满足$\mathbf{u}(\mathbf{a}'') > \mathbf{u}(\mathbf{0})$。

如果找不到，我们至少可以找到一个$\mathbf{a}''$，使得矩阵$\mathbf{u}(\mathbf{a}'') - \mathbf{u}(\mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$且让其中等于0的元素尽量少。这时我们就可以定义一个划分$\{S, \bar{S}\}$，其中$S$就是满足$u_i(\mathbf{a}'') > u_i(\mathbf{0})$的$i$的集合。那么根据假设3必然可以找到$j \in S, k \in \bar{S}$满足$J_kj(\mathbf{0}) > 0$，那么我们定义一个$\mathbf{a}'''$，其中$a_j''' = a_j'', a_l''' = a_l'' + \epsilon, \forall l \neq j$，只要$\epsilon$取得足够小，由效用函数的连续性可得$u_k(\mathbf{a}''') > u_k(\mathbf{0})$而$u_i(\mathbf{a}''') > u_i(\mathbf{0}), \forall i \in S$，这样一来，$\mathbf{a}'''$的存在便与$\mathbf{a}''$的取法矛盾了。因此我们可以找到我们要求的严格更优的行动方案。

我们考虑$\frac{d\mathbf{u}(\zeta\mathbf{a}'')}{d\zeta}$,由$u_i$的凹性可知,$\frac{du_i(\zeta\mathbf{a}'')}{d\zeta} > \frac{u_i(\mathbf{a}'')-u_i(\mathbf{0})}{a_{2i}}$, 由此我们有

$$\frac{d\mathbf{u}(\zeta\mathbf{a}'')}{d\zeta}\Big|_{\zeta=0} = \mathbf{J}(\zeta\mathbf{a}'')\mathbf{a}''\Big|_{\zeta=0} = \mathbf{J}(\mathbf{0})\mathbf{a}'' > \mathbf{0}$$

而这意味着存在$\mathbf{a}'', \mathbf{B}(\mathbf{a}'') > \mathbf{a}''$,于是根据Collatz-Wielandt公式，我们就有$r(\mathbf{B}(\mathbf{0})) > 1$.

而当放松假设3，即假设3不满足时，我们只要用同样的思路处理边际收益矩阵的约化块即可得到相同结论。

# Appendix B. Proof of Theorem 1

## B.1 THEOREM 1

Theorem 1: 对于一个非负的 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_{++}$, 以下两条论述等价：

a) $\boldsymbol{a}$ 满足特征向量中心性，即 $\boldsymbol{B(a)a = a}$；b) $\boldsymbol{a}$ 是一个林达尔结果

## B.2 Restatement of Definitions

林达尔结果的定义：

Definition 1: 我们称行动方案 $\boldsymbol{a}^*$ 是效用 $\boldsymbol{u}$ 的林达尔结果，若给定价格矩阵 $\boldsymbol{P}$，对每一个 $\boldsymbol{i}$ 成立：

a) 当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^*$ 时满足不等式:

$$\sum_{j:j\neq i} P_{ij} a_j \leq a_i \sum_{j:j\neq i} P_{ji} \tag{$BB_i(P)$}$$

b) 对于每一个满足不等式 $(\boldsymbol{BB_i(P)})$ 的 $\boldsymbol{a}$，满足：

$$u_i(a^*) \leq u_i(a)$$

上述定义中并未考虑价格矩阵的对角项。在本文的设定中，令 $\boldsymbol{P_{ii} = -\sum_{j:j\neq i} P_{ji}}$。而对于 $\boldsymbol{P_{ij} (i \neq j)}$ 的项，皆与 Definition 1 保持一致。由此，我们可以得到林达尔结果的等价形式：

Definition 5: 我们称行动策略 $\boldsymbol{a}^*$ 对于效用 $\boldsymbol{u}$ 是一个林达尔结果，若存在价格矩阵 $\boldsymbol{P_{nxn}}$，其每列和为 0，使得对于每一个 $\boldsymbol{i}$ 满足：

a) 当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^*$ 时满足不等式：

$$\sum_{j\in N} P_{ij} a_j \leq 0 \tag{$\widehat{BB_i}(P)$}$$

b) 对于每一个满足 $(\widehat{\boldsymbol{BB_i}}(\boldsymbol{P}))$ 的 $\boldsymbol{a}$，有：

$$u_i(a^*) \leq u_i(a)$$

特征向量中心性的定义：

Definition 2: 行动策略 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_+$ 具有特征向量中心性，若满足 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 且：

$$B(a)a = a$$

## B.3 Proof of LEMMA 2

Lemma 2： 如果 $\boldsymbol{a}^* \neq \boldsymbol{0}$ 对于效用 $\boldsymbol{u}$ 是一个林达尔结果，那么有：$\boldsymbol{a}^* \in \mathbb{R}^n_{++}$。

反证法：假设 $\boldsymbol{a}^*$ 中存在等于 0 的元素。

令 $\boldsymbol{P}$ 为满足条件的价格矩阵，使得 $\boldsymbol{a}^*$ 是一个林达尔结果。令 $\boldsymbol{S}$ 为满足 $\boldsymbol{a_i^* = 0}$ 的 $\boldsymbol{i}$ 的集合，由于 $\boldsymbol{a}^* \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{N}$ 的真子集。

由强连通性 (Assumption 3)，存在 $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{S}$ 以及 $\boldsymbol{j} \notin \boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{J_{ij}(a^*) > 0}$，即可得：

$$P_{ij} > 0$$

否则，当 $\boldsymbol{j}$ 相对于 $\boldsymbol{a}^*$ 略微增加行动时满足式 $(\boldsymbol{BB_i(P)})$，从而比结果 $\boldsymbol{a}^*$ 更优，与林达尔结果的定义相矛盾。

接下来考虑个体 $\boldsymbol{i}$ 在 $\boldsymbol{a}^*$ 处的预算约束：

$$\sum_{k:k\neq i} P_{ik} a_k^* \leq a_i^* \sum_{k:k\neq i} P_{ki} \tag{$BB_i(P)'$}$$

由于 $\boldsymbol{a_i^* = 0}$，上式右侧为零。但存在 $\boldsymbol{P_{ij} > 0}$ 且 $\boldsymbol{a_j^* > 0 (j \notin S)}$，上式左侧大于零。矛盾！故假设不成立。Q.E.D.

### B.4 Proof：b implies a

给定非零的林达尔结果 $\boldsymbol{a}^*$，满足预算约束条件 $(\widehat{\boldsymbol{BB}_i}(\boldsymbol{P}))$ 下对于每一个 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{u_i}$ 的最优化问题。

由 Lemma 2 有 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_{++}$，即每一项皆为正。这保证了 $\boldsymbol{a}^*$ 是一个内点解，则在给定价格下有：

$$\frac{\boldsymbol{P_{ij}}}{\boldsymbol{P_{ik}}} = \frac{\boldsymbol{J_{ij}(a^*)}}{\boldsymbol{J_{ik}(a^*)}} \tag{C1}$$

由强连通性，存在 $\boldsymbol{P_{ij}} > \boldsymbol{0}$，则最优化时预算约束条件取等，即：

$$\boldsymbol{Pa^*} = \boldsymbol{0} \tag{C2}$$

由 C1、C2，得 $\boldsymbol{J(a^*)a^*} = \boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{B(a^*)a^*} = \boldsymbol{a^*}$

### B.5 Proof：a implies b

给定特征向量中心性，则 $\boldsymbol{a}^*$ 是 $\boldsymbol{B(a^*)}$ 的一个右特征向量。

由 Perron-Frobenius 定理可知 1 是 $\boldsymbol{B(a^*)}$ 的最大特征值。如 Proposition 1a 中的论述，存在 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}_+$ 使得 $\boldsymbol{\theta J(a^*)} = \boldsymbol{0}$；即对于 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n_+$，$\boldsymbol{a}^*$ 使得 $\sum_i \boldsymbol{\theta_i u_i(a)}$ 最大化。

我们需要找到价格矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得上述 $\boldsymbol{a}^*$ 满足林达尔结果，一个合理的猜测是：

$$\boldsymbol{P_{ij}} = \boldsymbol{\theta_i J_{ij}(a^*)},\ \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \tag{C3}$$

这里补充对这个猜测做几点解释：

一方面，考虑每个个体 i 在预算约束 $\boldsymbol{BB_i(P)'}$ 下最大化 $\boldsymbol{u_i}$ 的问题，从一阶条件可以得到：$\boldsymbol{\mu_i P_{ij}} = \boldsymbol{J_{ij}(a^*)}$，其中 $\boldsymbol{\mu_i}$ 为拉格朗日乘子，表示了新增一单位收入带来的边际效益；另一方面，考虑整体 $\sum_i \boldsymbol{\theta_i u_i(a)}$ 的最大化问题，其中一个决策者负责给所有个体 $\boldsymbol{i}$ 赋予合适的权重，则决策者需要使 $\boldsymbol{\mu_i \theta_i}$ 是一个常数（对所有个体 $\boldsymbol{i}$ 保持一致），否则决策者就会有动机增加一部分个体的行动并减少一部分个体的行动以达到更高的整体效益。综合上述两点，需要使 $\boldsymbol{P_{ij}}$ 与 $\boldsymbol{\theta_i J_{ij}(a^*)}$ 成正比，于是作出 $\boldsymbol{P_{ij}} = \boldsymbol{\theta_i J_{ij}(a^*)}$ 的猜测（起作用的是相对价格）。这个猜测表明，当一个个体的 $\boldsymbol{\theta_i}$（即帕累托权重）更高时，他支付的价格会更高。

基于这项猜测，继续我们的证明：

不妨令 $\boldsymbol{P_{ii}} = \boldsymbol{\theta_i J_{ii}(a^*)}$，也满足 $\sum_{i\in N} \boldsymbol{P_{ij}} = \sum_{i \in N} \boldsymbol{\theta_i J_{ij}(a^*)} = \boldsymbol{(\theta J(a^*))_j} = \boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{\theta J(a^*))_j}$ 为 $\boldsymbol{\theta J(a^*)}$ 的第 $\boldsymbol{j}$ 项。

由 $\boldsymbol{B(a^*)a^*} = \boldsymbol{a^*}$，则 $\boldsymbol{J(a^*)a^*} = \boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{P}$ 中的每一行与 $\boldsymbol{J(a^*)}$ 中的相应行成比例，则：

$$\boldsymbol{Pa^*} = \boldsymbol{0} \tag{C4}$$

同时，考虑价格与边际替代率之间的关系，（分母非零时）有：

$$\frac{\boldsymbol{P_{ij}}}{\boldsymbol{P_{ik}}} = \frac{\boldsymbol{\theta_i J_{ij}(a^*)}}{\boldsymbol{\theta_i J_{ik}(a^*)}} = \frac{\boldsymbol{J_{ij}(a^*)}}{\boldsymbol{J_{ik}(a^*)}} \tag{C5}$$

这保证了在价格 $\boldsymbol{P}$ 上所有个体的决策达到最优。同时，C4 保证了预算约束条件的满足，故林达尔结果成立。

Q.E.D.

# Appendix C. Foundations for Lindahl Outcome

## C.1. 证明：N 人讨价还价博弈中产生的均衡满足林达尔均衡。

证：我们已经证明，一个满足林达尔均衡的行动组合满足中心性条件，因此我们只需证明 n 人讨价还价博弈的结果满足中心性条件。

首先我们证明，在帕累托有效的均衡中，中心性条件必定满足。

设$\boldsymbol{a}$为一个帕累托有效的均衡，对于效用向量$\boldsymbol{u}$对$\boldsymbol{a}$求导所得的雅各比行列式$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u})$，有正定、负定和零三种情况。若$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u})$负定，则意味着$\boldsymbol{a}$仍未实现效用最大化。若正定，定义矩阵 **D** 满足 $D\,ii\,(a) = -J\,ii\,(a)$，则有

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{a})^{-1}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$$

即

$$(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{a})^{-1}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{I})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} > \boldsymbol{a}$$

由于

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{\min_{a_i'}} \frac{[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}']_{\boldsymbol{i}}}{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}'}$$

因此有

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})) > 1$$

根据文中的 proposition 1，可知只有在$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})) = 1$的情形下$\boldsymbol{a}$满足帕累托均衡，与上述结论不符，因此$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{u})$不为正定阵。由此我们有

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

即任意帕累托均衡$\boldsymbol{a}$均满足中心性条件

$$(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{a})^{-1}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{I})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

下面我们定义$\boldsymbol{a}$的标准化形式

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sum_{\boldsymbol{i}} a_i}$$

根据博弈规则，如果$\boldsymbol{d}$行为比例最终被选择，那么参与者 i 选择放大的倍数为

$$\lambda_i = \min\{\lambda : [\boldsymbol{J}(\lambda\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}]_i \le 0\}$$

当 λ 满足$\lambda = \sum_{\boldsymbol{i}} a_i$时，$[\boldsymbol{J}(\lambda\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}]_i \le 0$恰好取等于，即当$\boldsymbol{d}$出现时博弈者会选择将它放大$\sum_{\boldsymbol{i}} a_i$倍变为 $\boldsymbol{a}$。由此，可以证明在该博弈中最终会产生帕累托有效的结果$\boldsymbol{a}$，且该结果必定满足中心性条件，即必定满足林达尔均衡。

证毕

## C.2. 证明：讨价还价博弈产生的林达尔均衡是稳定的。

证：定义将偏好映射到行为空间上的映射$F$。假如偏好组合序列$\boldsymbol{u}^{(k)}$收敛于 $\boldsymbol{u}$，若行为序列$\boldsymbol{a}^{(k)}$满足$\boldsymbol{a}^{(k)} \in F(\boldsymbol{u}^{(k)})$且$\boldsymbol{a}^{(k)}$收敛于$\boldsymbol{a}$，则有$\boldsymbol{a} \in F(\boldsymbol{u})$，那么我们说映射$F$是上连续的。

我们假设集合$\mathbf{F}$为所有满足帕累托最优、纳什均衡、个人理性、上连续四个条件的映射$F$的集合。对于任意的偏好 $\mathbf{u}$，定义

$$R(\mathbf{u}) = \bigcap_{F \in \mathbf{F}} F(\boldsymbol{u})$$

$R$ 同样也为从偏好到行为空间上的映射。由定义有，$R$ 事实上是满足稳健性条件的所有映射的交集。也就是说，只要我们能够证明形成林达尔均衡的映射 $L$ 与 $R$ 等价，那么就能够证明林达尔均衡的稳定性。

由于 $R$ 中的映射必定是帕累托最优的，由前面的证明可得，当帕累托最优的组合必定满足

中心性，而中心性和和林达尔均衡是等价的，因此我们有 $R$ 是 $L$ 的子集。同样，由林达尔均衡的定义，我们容易得出 $L$ 同样也是 $R$ 的子集。
由此，我们可知 $L$ 与 $R$ 等价，从而证明林达尔均衡的稳定性。

### C.3. 证明：博弈中不可能出现打破林达尔均衡的小群体。

证：当均衡 $\boldsymbol{a}$ 被采取时不会出现打破均衡的小群体，我们称该均衡对群体偏离是稳定的。下面我们对对群体偏离稳定下一个具体的定义。
对于一个行为$\boldsymbol{a}$,假如不存在从属于全体博弈者集合N的小群体M,也没有另一行为$\boldsymbol{a}'$满足：
①对于不属于 M 的个体 i，均有$a_i' = 0$。
②对于每个属于 M 的个体 i，$\boldsymbol{a}'$弱偏好于 $\boldsymbol{a}$。
③对于部分属于 M 的个体 i，$\boldsymbol{a}'$强偏好于 $\boldsymbol{a}$。
那么该行为对于群体偏离是稳定的。
下面我们将证明林达尔均衡是对群体偏离稳定的。
假如存在林达尔均衡$\boldsymbol{a}^*$对于群体偏离不稳定，那么对于存在偏离倾向的小群体 M，则有$\mathrm{i} \in \mathrm{M}$时，有

$$\sum_{j \in N} P_{ij} a_j' \geq 0$$

又由于 M 中有部分个体$\boldsymbol{a}'$强偏好于 $\boldsymbol{a}$，即上式中取大于号，此时我们有

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} P_{ij} a_j' > 0$$

但是另一方面我们有

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} P_{ij} a_j' = \sum_{j \in N} a_j' \sum_{i \in M} P_{ij} \leq \sum_{j \in N} a_j' \sum_{i \in N} P_{ij} = 0$$

与上式不符，因此假设不成立。
证毕。

# Appendix D. Application & Discussion

## D.1. Proposition 3

Let $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})^T$, and assume that this matrix is aperiodic. Then $\boldsymbol{a}$ has the centrality property if and only if, for every i and j,

$$\frac{a_i}{a_j} = \lim_{\ell\to\infty} \frac{\sum_{w\in\mathcal{W}_i^{\downarrow}(\ell;\boldsymbol{M})} v(w;\boldsymbol{M})}{\sum_{w\in\mathcal{W}_j^{\downarrow}(\ell;\boldsymbol{M})} v(w;\boldsymbol{M})} \tag{1.1}$$

Proof. 证明分为两步

### 1.1

先证明：$M^\ell$ 的元素 $M_{ij}^\ell$ 的含义是从 i 到 j 所有长度为 $\ell$ 的通路的价值和

(1)$\ell = 1$ 时这是显然的

(2)$\ell = 2$ 时，$M_{ij}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} M_{ik}M_{kj}$，每一项表示通路 $i \to k \to j$ 的价值（若通路不存在即表现为价值为 0）则求和表示所有从 i 到 j 长度为 2 的通路的价值和

(3) 类似地用数学归纳法，当 $\ell-1$ 成立时，$M_{ij}^\ell = \sum\limits_{k=1}^{n} M_{ik}^{\ell-1}M_{kj}$，每一项表示通路 $i \to k$（长度为 $\ell-1$）$\to j$ 的通路的价值和，求和即表示所有长度为 $\ell$ 的通路的价值和，$\ell$ 时结论成立

由该结论可知 $\sum\limits_{j=1}^{n} M_{ij}^\ell = \sum_{w\in\mathcal{W}_i^{\uparrow}(\ell;\boldsymbol{M})} v(w;\boldsymbol{M})$，其中 $\mathcal{W}_i^{\uparrow}(\ell;\boldsymbol{M})$ 表示从 i 点出发的长度为 $\ell$ 的通路的价值和

$\Rightarrow \sum_{w\in\mathcal{W}_i^{\downarrow}(\ell;\boldsymbol{M})} v(w;\boldsymbol{M}) = \sum_{w\in\mathcal{W}_i^{\uparrow}(\ell;\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}))} v(w;\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})) = \sum\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})_{ij}^\ell$

那么命题转化为 $\frac{a_i}{a_j} = \lim\limits_{\ell\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})_{ik}^\ell}{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})_{jk}^\ell}$

### 1.2

定理：对于任何非负不可约矩阵 $\boldsymbol{Q}$，记 $r$ 为其谱半径，左右主特征向量分别为 $\boldsymbol{q^T}, \boldsymbol{p}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是非周期的等价于 $\lim\limits_{\ell\to\infty} (\frac{Q}{r})^\ell = \boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{pq^T}}{q^T p}$ （该定理的证明在此处省略）

设 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T, \boldsymbol{q^T} = (q_1, \ldots, q_n)$，则 $\boldsymbol{G}_{ij} = p_i q_j, \sum\limits_{k=1}^{n} \boldsymbol{G}_{ik} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_i q_k = p_i \sum\limits_{k=1}^{n} q_k$

那么由该定理可知:$\lim\limits_{\ell\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})_{ik}^\ell}{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})_{jk}^\ell} = \frac{p_i}{p_j}$

则 $\boldsymbol{a}$ 具有中心性 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})$ 的右主特征向量 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\ell\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})_{ik}^\ell}{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{a})_{jk}^\ell} = \frac{a_i}{a_j}$

QED.

## D.2. Proposition 5

Consider a Pareto efficient outcome $\boldsymbol{a}^{\star}$ , and let $\boldsymbol{\theta}$ be the corresponding Pareto weights. Then,

$$c_M(\boldsymbol{a}^{\star}) \leq \sum \frac{\theta_i}{\theta_j} B_{ij}(\boldsymbol{a}^{\star}) a_j^{\star}, \tag{1}$$

where the summation is taken over all ordered pairs (i,j) such that one element is in M and the other is in $M^C$.

Proof.

这里推导该方案是如何得到的，用待定系数法设 $m_i = \lambda_i a_i$

$$(\boldsymbol{\theta_M}, \boldsymbol{\theta_{M^C}}) \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{J_M}} & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{J_{M^C}}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

先考虑 M 组，$\boldsymbol{\theta_M} \tilde{\boldsymbol{J_M}} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{j \in M} \theta_j \tilde{\boldsymbol{J_{ij}}} = 0$，对 $\forall i \in M$ 成立

$$\tilde{\boldsymbol{J_{ij}}} = \begin{cases} -1 + m_i' & , j = i \\ J_{ij} & , i,j \in M \text{或} i,j \in M^C, \text{且} j \neq i \\ 0 & , i \in M, j \in M^C \text{或} i \in M^C, j \in M \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{j \in M, j \neq i} \theta_j \boldsymbol{J_{ji}} + \theta_i (\boldsymbol{J_{ii}} + \lambda_i) = 0$

$\Rightarrow \theta_i \lambda_i = \sum\limits_{j \in M^C} \theta_j \boldsymbol{J_{ji}} \Rightarrow \lambda_i = \frac{1}{\theta_i} \sum\limits_{j \in M^C} \theta_j \boldsymbol{J_{ji}}$

而由于假定 $\boldsymbol{J_{ii}} = -1 \Rightarrow \boldsymbol{B_{ij}(a)} = \boldsymbol{J_{ij}(a)}, j \neq i \Rightarrow m_i = \frac{1}{\theta_i} \sum\limits_{j \in M^C} \theta_j \boldsymbol{B_{ji}(a^{\star})}$

而对于 $M^C$ 的分析是相同的

QED.