

附录

定理详细数学推导

前置：现值哈密顿协态方程推导

协态方程： $\frac{\partial H}{\partial \ln m_{jk}} = \rho \mu_{jk} - \dot{\mu}_{jk}$

1. 两类哈密顿定义

无限期优化： $\max \int_0^\infty e^{-\rho t} F(u, x) dt$ ，约束 $\dot{x} = g(u, x)$

原值哈密顿： $H_d = e^{-\rho t} [F + \tilde{\mu} \cdot g]$

现值哈密顿： $H = F + \mu \cdot g$

转换关系： $\tilde{\mu} = e^{-\rho t} \mu \Leftrightarrow \mu = e^{\rho t} \tilde{\mu}$

2. 原值哈密顿协态条件： $\frac{\partial H_d}{\partial x} = -\dot{\tilde{\mu}}$

3. 变量求导： $\dot{\tilde{\mu}} = -\rho e^{-\rho t} \mu + e^{-\rho t} \dot{\mu}$ ，代入 $H_d = e^{-\rho t} H$

$$e^{-\rho t} \frac{\partial H}{\partial x} = -(-\rho e^{-\rho t} \mu + e^{-\rho t} \dot{\mu})$$

约去指数项，得到： $\frac{\partial H}{\partial x} = \rho \mu - \dot{\mu}$

4. 替换状态变量 $x = \ln m_{jk}$ 、共态 $\mu = \mu_{jk}$ ，即： $\frac{\partial H}{\partial \ln m_{jk}} = \rho \mu_{jk} - \dot{\mu}_{jk}$

引理 1 证明：最优配置下份额、劳动投入不随时间变化

步骤 1：计划者优化问题变量改写

原代表性家庭目标现值效用：

$$V = \int_0^\infty e^{-\rho t} \sum_j \beta_j \ln c_j(t) dt$$

商品出清： $q_j = c_j + \sum_i s_{ij}$ ，定义 $v_{ij} \equiv \frac{s_{ij}}{q_j} \Rightarrow s_{ij} = v_{ij} q_j$ ，因此：

$$c_j = \left(1 - \sum_i v_{ij}\right) q_j$$

对数化 Cobb-Douglas 生产函数：

$$\ln q_j = \ln z_j + \alpha_j \ln \ell_j + \sum_k \sigma_{jk} \ln m_{jk}$$

$t \geq 0$ 恢复期 TFP 固定不变 $\ln z_j$ 为常数。

中间品动态约束：

$$\frac{d \ln m_{ij}}{dt} = \delta^{-1} \left(\ln v_{ij} + \alpha_j \ln \ell_j + \sum_k \sigma_{jk} \ln m_{jk} - \ln m_{ij} \right)$$

资源约束： $\sum_j \ell_j = \bar{\ell}$ 。

优化变量：控制变量 $\{\ell_j, v_{ij}\}$ ；状态变量 $\{\ln m_{jk}\}$ ；共态变量 $\{\mu_{jk}\}$ ， λ 为劳动力约束乘子。

步骤 2：构造现值哈密顿函数

$$\begin{aligned} H = & \sum_j \beta_j \left(\alpha_j \ln \ell_j + \sum_k \sigma_{jk} \ln m_{jk} + \ln \left(1 - \sum_i v_{ij} \right) \right) \\ & + \delta^{-1} \sum_{ij} \mu_{ij} \left(\ln v_{ij} + \alpha_j \ln \ell_j + \sum_k \sigma_{jk} \ln m_{jk} - \ln m_{ij} \right) \\ & + \lambda \left(\bar{\ell} - \sum_j \ell_j \right) \end{aligned}$$

步骤 3：最大值原理一阶条件（FOC）

$$(A1) \text{ 对 } \ell_j \text{ 求导：} \quad \frac{\alpha_j (\beta_j + \delta^{-1} \sum_i \mu_{ij})}{\ell_j} - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$(A2) \text{ 对 } v_{ij} \text{ 求导：} \quad \frac{\beta_j}{1 - \sum_i v_{ij}} - \frac{\delta^{-1} \mu_{ij}}{v_{ij}} = 0 \quad (2)$$

$$(A3) \text{ 对 } \ln m_{jk} \text{ 协态方程：} \quad \beta_j \sigma_{jk} + \delta^{-1} \sigma_{jk} \sum_i \mu_{ij} - \delta^{-1} \mu_{jk} = \rho \mu_{jk} - \dot{\mu}_{jk} \quad (3)$$

横截条件： $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mu_{ij}(t) \ln m_{ij}(t) = 0$ 。

步骤 4：稳态求解协态 μ_{ij}

稳态 $\dot{\mu}_{jk} = 0$ ，整理 (A3)：

$$\beta_j + \delta^{-1} \sum_i \mu_{ij} = \frac{\mu_{jk}}{\sigma_{jk}} (\rho + \delta^{-1})$$

两边乘 δ :

$$\delta\beta_j + \sum_i \mu_{ij} = \mu_{jk} \cdot \frac{1 + \rho\delta}{\sigma_{jk}}$$

定义 $\zeta_j \equiv \frac{\mu_{jk}}{\sigma_{jk}}$ (与 k 无关), 代入:

$$\delta\beta_j + \sum_i \sigma_{ij}\zeta_i = (1 + \rho\delta)\zeta_j$$

向量形式: $\delta\beta' + \zeta'\Sigma = (1 + \rho\delta)\zeta'$,

$$\zeta' = \delta\beta'[(1 + \rho\delta)I - \Sigma]^{-1}$$

ζ 为常数, 故 μ_{ij} 全部为常数。

步骤 5: 引理 1 结论

μ_{ij} 为常数代入 (A1)(A2), $\ell_j v_{ij}$ 均为定值, 因此 $\frac{c_j(t)}{q_j(t)}, \frac{s_{ij}(t)}{q_j(t)}, \frac{\ell_j(t)}{\ell}$ 恒定, 引理 1 得证。

引理 3 证明: $\frac{d \ln m_{ij}(t)}{dt} = \delta^{-1} x_j(t), \forall i, j$

定义:

$$x_j(t) \equiv \ln \left(\sum_i s_{ij}(t) \right) - \ln \left(\sum_i m_{ij}(t) \right)$$

事实 1: $t = 0$ 冲击后, 对固定 j , $\ln m_{ij}(0) - \ln m_{ij}^{ss}$ 对所有 i 取值相同;

事实 2: 由引理 1, s_{ij}/q_j 不变, $\ln s_{ij}(t) - \ln s_{ij}^{ss}$ 对所有 i 取值相同。

由中间品运动方程:

$$\frac{d \ln m_{ij}}{dt} = \delta^{-1} (\ln s_{ij} - \ln m_{ij})$$

$\ln s_{ij} - \ln m_{ij}$ 与 i 无关, 恒等于 $x_j(t)$, 因此

$$\frac{d \ln m_{ij}(t)}{dt} = \delta^{-1} x_j(t)$$

引理 3 得证。

命题 1 证明: 部门产出、GDP 显式时间路径

步骤 1: $x(t)$ 微分方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \frac{d \ln q_j}{dt} - \frac{d \ln (\sum_i m_{ij})}{dt} \\ \frac{d \ln q_j}{dt} &= \sum_k \sigma_{jk} \frac{d \ln m_{jk}}{dt} = \delta^{-1} \sum_k \sigma_{jk} x_k \end{aligned}$$

向量形式 $\frac{d \ln \mathbf{q}}{dt} = \delta^{-1} \Sigma \mathbf{x}$ 。

$$\frac{d \ln (\sum_i m_{ij})}{dt} = \delta^{-1} x_j$$

向量形式 $\frac{d \ln (\sum m_{.j})}{dt} = \delta^{-1} \mathbf{x}$ 。

因此

$$\dot{\mathbf{x}} = \delta^{-1} \Sigma \mathbf{x} - \delta^{-1} \mathbf{x} = -\delta^{-1} (I - \Sigma) \mathbf{x}$$

初值 $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{z}}$, 解:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t} \tilde{\mathbf{z}}$$

步骤 2: 初始产出

$$\ln \mathbf{q}(0) = \ln \mathbf{q}^{ss} - (I - \Sigma)^{-1} \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{z}} = \ln \mathbf{q}^{ss} - \Sigma(I - \Sigma)^{-1} \tilde{\mathbf{z}}$$

步骤 3: 积分求 $\ln q(t)$

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{q}(t) &= \ln \mathbf{q}(0) + \delta^{-1} \Sigma \int_0^t \mathbf{x}(s) ds \\ \int_0^t e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)s} ds &= \delta(I - \Sigma)^{-1} [I - e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t}] \end{aligned}$$

代入得

$$\ln \mathbf{q}(t) = \ln \mathbf{q}^{ss} - \Sigma(I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t} \tilde{\mathbf{z}}$$

步骤 4: GDP 路径

$$\begin{aligned} \ln c(t) - \ln c^{ss} &= \beta' (\ln q(t) - \ln q^{ss}) \\ \ln c(t) &= \ln c^{ss} - \beta' \Sigma(I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t} \tilde{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

命题 1 证毕。

命题 2 证明: 短期 TF 冲击福利损失

步骤 1: 福利积分

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{z}}) - V^{ss} &= \int_0^\infty e^{-\rho t} (\ln c(t) - \ln c^{ss}) dt \\ \ln c - \ln c^{ss} &= -\beta' \Sigma(I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t} \tilde{\mathbf{z}} \\ V - V^{ss} &= -\beta' \Sigma(I - \Sigma)^{-1} \left[\int_0^\infty e^{-(\rho I + \delta^{-1}(I-\Sigma))t} dt \right] \tilde{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

步骤 2：矩阵积分

记 $A = \rho I + \delta^{-1}(I - \Sigma) = \delta^{-1}[(1 + \rho\delta)I - \Sigma]$ ，则

$$\int_0^\infty e^{-At} dt = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \delta[(1 + \rho\delta)I - \Sigma]^{-1}$$

因此

$$V - V^{ss} = -\delta\beta'\Sigma(I - \Sigma)^{-1}[(1 + \rho\delta)I - \Sigma]^{-1}\tilde{z}$$

步骤 3：分式变形

利用恒等式

$$\frac{\delta\Sigma}{(I - \Sigma)((1 + \rho\delta)I - \Sigma)} = \frac{1}{\rho} \left[(I - \Sigma)^{-1} - \left(I - \frac{\Sigma}{1 + \rho\delta} \right)^{-1} \right]$$

从而

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\rho} \left[\beta'(I - \Sigma)^{-1} - \beta' \left(I - \frac{\Sigma}{1 + \rho\delta} \right)^{-1} \right]$$

$$V(\tilde{z}) - V^{ss} = -\mathbf{v}'\tilde{z}$$

步骤 4：级数展开

Domar 权重： $\gamma' = \beta' \sum_{s=0}^\infty \Sigma^s$ 。

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\rho} \beta' \sum_{s=0}^\infty \left[1 - (1 + \rho\delta)^{-s} \right] \Sigma^s$$

定义 Alpha 中心： $\iota'_\alpha = \beta' \sum_{s=0}^\infty \alpha^s \Sigma^s$ ，取 $\alpha_1 = 1$ ， $\alpha_2 = \frac{1}{1 + \rho\delta}$ ，则

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\rho} (\iota'_{\alpha_1} - \iota'_{\alpha_2})$$

上游度 $\eta_i = v_i/\gamma_i$ 推导

记 $r = \frac{1}{1 + \rho\delta}$ ， $\mathbf{a}' = \beta'(I - r\Sigma)^{-1}$ ， $\theta_{in} \equiv \frac{\sigma_{ni}\gamma_n}{\gamma_i}$ 。

由定义：

$$\rho\eta_j = 1 - \frac{a_j}{\gamma_j}, \quad \rho\eta_j = \sum_n \theta_{jn} - r \sum_n \theta_{jn}(1 - \rho\eta_n)$$

向量形式：

$$\rho\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Theta}\mathbf{1} - r\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{1} - \rho\boldsymbol{\eta})$$

整理得

$$\boldsymbol{\eta} = r\boldsymbol{\Theta}(\delta\mathbf{1} + \boldsymbol{\eta})$$

求解：

$$\boldsymbol{\eta} = \delta r \Theta (I - r \Theta)^{-1} \mathbf{1} = \delta \sum_{s=1}^{\infty} (r \Theta)^s \mathbf{1}$$

η_i 代表行业上游度，数值越大受临时 TFP 冲击福利损失越高。

一般模型一阶近似与福利公式推导

步骤 1：稳态对数一阶近似弹性定义

对一般齐次消费、生产、调整成本函数做稳态一阶对数泰勒展开，定义局部弹性：

$$\begin{aligned}\beta_j &= \frac{\partial \ln c}{\partial \ln c_j}, \\ \sigma_{ij} &= \frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln m_{ij}}, \\ \omega_{ij}^{-1} &= \frac{\partial \ln g_{ij}}{\partial \ln s_{ij}}.\end{aligned}$$

步骤 2：近似后的中间投入动态

一般调整成本动态经一阶近似后对数线性化为：

$$\frac{d \ln m_{ij}}{dt} = \omega_{ij}^{-1} (\ln s_{ij} - \ln m_{ij}).$$

定义对数缺口 $x_j \equiv \ln s_j - \ln m_j$ ，则：

$$\frac{d \ln m_{ij}}{dt} = \omega_{ij}^{-1} x_j.$$

步骤 3：产出动态方程

生产函数一阶近似：

$$\ln q_i = \ln z_i + \sum_j \sigma_{ij} \ln m_{ij}.$$

对时间求导（暂时冲击下 $\dot{z}_i = 0$ ）：

$$\frac{d \ln q_i}{dt} = \sum_j \sigma_{ij} \frac{d \ln m_{ij}}{dt}.$$

代入投入动态：

$$\frac{d \ln q_i}{dt} = \sum_j \sigma_{ij} \omega_{ij}^{-1} x_j.$$

矩阵形式：

$$\frac{d \ln \mathbf{q}}{dt} = \boldsymbol{\omega}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}.$$

步骤 4：缺口动态微分方程

由最优目标投入结构 $\ln \mathbf{s} = \Sigma \ln \mathbf{q}$:

$$\frac{d \ln \mathbf{s}}{dt} = \Sigma \frac{d \ln \mathbf{q}}{dt}.$$

对缺口 $\mathbf{x} = \ln \mathbf{s} - \ln \mathbf{m}$ 求导:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d \ln \mathbf{s}}{dt} - \frac{d \ln \mathbf{m}}{dt}.$$

代入得:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \Sigma \omega^{-1} \Sigma \mathbf{x} - \omega^{-1} \Sigma \mathbf{x} \\ &= -\omega^{-1} (\mathbf{I} - \Sigma) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

核心动态系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\omega^{-1} (\mathbf{I} - \Sigma) \mathbf{x}.$$

步骤 5：动态路径解

一阶线性系统的矩阵指数解:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\omega^{-1}(\mathbf{I}-\Sigma)t} \tilde{\mathbf{z}}.$$

步骤 6：缺口到产出的传导关系

缺口动态完全决定产出随时间的波动, 满足:

$$\Delta \ln \mathbf{q}(t) = (\mathbf{I} - \Sigma)^{-1} \mathbf{x}(t).$$

步骤 7：福利积分与矩阵化简

社会福利:

$$V = \int_0^\infty e^{-\rho t} \Delta \ln c(t) dt, \quad \Delta \ln c = \beta' \Delta \ln \mathbf{q}.$$

利用矩阵积分公式

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} e^{-\mathbf{A}t} dt = (\rho \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1},$$

令 $\mathbf{A} = \omega^{-1}(\mathbf{I} - \Sigma)$ 。定义一般形式折扣矩阵:

$$\Omega_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 + \rho \omega_{ij}}, \quad \Omega = \Sigma (\mathbf{I} + \rho \omega)^{-1}.$$

步骤 8：完整积分推导

将产出与冲击传导关系代入：

$$\Delta \ln q(t) = (\mathbf{I} - \Sigma)^{-1} \mathbf{x}(t).$$

消费变动：

$$\Delta \ln c(t) = \beta'(\mathbf{I} - \Sigma)^{-1} \mathbf{x}(t).$$

代入动态路径：

$$V = \beta'(\mathbf{I} - \Sigma)^{-1} \int_0^\infty e^{-\rho t} e^{-\mathbf{A}t} dt \tilde{\mathbf{z}}.$$

代入矩阵积分公式：

$$V = \frac{1}{\rho} \beta'(\mathbf{I} - \Sigma)^{-1} [\mathbf{I} - \Omega] \tilde{\mathbf{z}}.$$

最终福利权重公式：

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\rho} \left[\beta'(\mathbf{I} - \Sigma)^{-1} - \beta'(\mathbf{I} - \Omega)^{-1} \right].$$

对投入双向调整的检验

基准模型仅考虑投入扩张阶段的单边调整成本，即冲击消退后中间投入仅能逐步扩张、恢复至稳态水平。为验证模型稳健性，本小节放松单边调整假设，引入投入收缩与扩张双向渐进调整机制，对暂时性持续时间为 T 的负向 TFP 冲击进行福利推导与检验，验证核心结论在双向调整框架下依然成立。

步骤 1：双向调整下的缺口动态方程

延续基准模型设定，定义投入供需对数缺口 $x(t) \equiv \ln \sum_i s_{ij}(t) - \ln \sum_i m_{ij}(t)$ ，在双向渐进调整约束下，中间投入无论收缩、扩张均存在调整摩擦，缺口动态方程保持基准对数线性形式：

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\delta^{-1}(\mathbf{I} - \Sigma)x(t)$$

设定经济冲击场景：经济体在 $t \in [0, T)$ 期间遭受暂时性负向 TFP 冲击 \tilde{z} ， $t \geq T$ 后冲击完全消退、TFP 回归稳态水平。结合双向调整特征，缺口变量分阶段动态解为：

$$x(t) = \begin{cases} -e^{-\delta^{-1}(\mathbf{I} - \Sigma)t} \tilde{z} & t < T \\ e^{-\delta^{-1}(\mathbf{I} - \Sigma)(t-T)} \left(\mathbf{I} - e^{-\delta^{-1}(\mathbf{I} - \Sigma)T} \right) \tilde{z} & t \geq T \end{cases}$$

该式刻画了双向调整的核心特征：冲击存续期内投入收缩存在摩擦、缺口逐步累积；冲击消退后投入扩张存在摩擦、缺口缓慢收敛至稳态 0。

步骤 2：分阶段产出动态路径推导

结合产出与缺口的传导关系，分两段推导部门对数产出 $\ln q(t)$ 的动态路径。

阶段 1：冲击存续期 $t \in [0, T)$

产出动态积分形式为：

$$\begin{aligned}\ln q(t) &= \ln q(0) + \delta^{-1} \Sigma \int_0^t x(s) ds \\ &= \ln q^{ss} - (I - \Sigma)^{-1} \tilde{z} + \tilde{z} + \delta^{-1} \Sigma \int_0^t -e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)s} \tilde{z} ds \\ &= \ln q^{ss} - (I - \Sigma)^{-1} \tilde{z} + \Sigma(I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)t} \tilde{z}\end{aligned}$$

当 $t = T$ 时，得到冲击消退瞬间的产出水平：

$$\ln q(T) = \ln q^{ss} - \Sigma(I - \Sigma)^{-1} \tilde{z} + \Sigma(I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)T} \tilde{z}$$

阶段 2：冲击消退后 $t \geq T$

以 $t = T$ 为初始条件，继续积分推导产出收敛路径：

$$\begin{aligned}\ln q(t) &= \ln q(T) + \delta^{-1} \Sigma \int_0^{t-T} x(T+s) ds \\ &= \ln q^{ss} - \Sigma(I - \Sigma)^{-1} e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)(t-T)} \left(I - e^{-\delta^{-1}(I-\Sigma)T} \right) \tilde{z}\end{aligned}$$

该结果表明，双向调整下冲击消退后，产出仍会因前期投入收缩的摩擦滞后，持续低于稳态水平，验证了暂时性冲击的长期持续性影响。

步骤 3：双向调整下的总福利损失积分

消费者终身福利定义为贴现后的消费对数积分：

$$W - V^{ss} = \int_0^\infty e^{-\rho s} (\ln c(s) - \ln c^{ss}) ds$$

其中消费满足 $\ln c(t) = \beta' \ln q(t)$ ，将福利积分拆分为冲击存续期与冲击消退后两段：

$$W - V^{ss} = \int_0^T e^{-\rho s} \Delta \ln c(s) ds + e^{-\rho T} \int_0^\infty e^{-\rho s} \Delta \ln c(T+s) ds$$

代入分阶段产出路径并完成矩阵积分化简，最终得到双向调整下的福利损失公式：

$$W - V^{ss} = -\frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) \beta' \left(I - \frac{\Sigma}{1 + \rho \delta} \right)^{-1} \tilde{z}$$

步骤 4：双向调整模型核心结论检验

1. 核心福利公式稳健性：双向调整框架下的福利表达式与基准单边调整模型结构一致，仅新增冲击持续时间贴现项 $(1 - e^{-\rho T})$ ，证明基准模型的福利传导机制、上游行业冲击超额损失结论不受单边调整假设约束。

2. 冲击持续性强化效应：相较于单边扩张调整，双向调整包含投入收缩摩擦，进一步延长了产出与消费的恢复周期，放大了上游行业暂时性冲击的长期福利损失，且冲击持续时间 T 越长，福利损失规模越大。

3. 行业异质性不变性：垂直生产链条中，上游行业福利冲击影响系数始终大于下游行业，行业上游度决定暂时性冲击福利损失的核心结论，在双向调整机制下依然成立。