



復旦大學
FUDAN UNIVERSITY

Public Debt and Low Interest Rate

American Economic Review

by Olivier Blanchard (2019)

汇报组：郭翱博 卢广乐 李思远 刘弈开 蔡之恒

2026年6月15日 《数量经济学》



目录

- 一、引言
- 二、利率、增长率与债务展期
- 三、代际转移与福利
- 四、数值模拟
- 五、边际收益与产出
- 六、论点与反论点

第一部分：引言

I .Introduction





- Olivier Blanchard, 美国法籍经济学家，MIT 前经济系系主任（1998-2003），IMF 前首席经济学家（2008–2015），现任彼得森国际经济研究所（PIIE）高级研究员，2018年度的美国经济学会（AEA）会长。Blanchard是新凯恩斯主义宏观经济学的奠基人之一，也是著名本科教科书《宏观经济学》的作者。
- 本文（Public Debt and Low Interest Rate）原文是Blanchard于2019年1月5日，在亚特兰大举行的AEA年会上发表的会长演讲（Presidential Address），随后发表在 *American Economic Review* 109(4)。

- 整个 2010 年代，欧美宏观经济政策领域都聚焦于紧缩和刺激政策的争论之中。
- 一方面，Reinhart & Rogoff (2010) 《Growth in a Time of Debt》提出的实证结论“债务/GDP 比率超过 90%，宏观经济增长就将显著放缓”在欧洲各国建立了财政整顿具有必要性的学术共识，被政客反复引用为实施紧缩政策，建立“债务阈值”的依据；
- 国际发达国家的宏观政策实践也体现出复杂性。美国国债在 2017 年特朗普政府减税后进入了快速上升通道，引发了人们对于美债未来偿付能力的普遍质疑。但另一个实例是，日本的债务/GDP 比率长期维持在超过200%的高位，却始终没有引发经济崩溃。
- 与此同时，各国央行采取宽松的货币政策，使得名义利率低于名义经济增长率成为了很普遍的现象（在那些高政府负债率的国家尤其如此）

- Blanchard借AEA年会演讲的机会，在这个宏观政策问题旋涡的正中心提出了四点具有争议的主张：
- ①长期利率小于经济增长率 ($r < g$) 的实证现象使得“债务屋顶”不再重要。换言之，即最简单的债务动态转移方程中

$$d_t = \frac{1+r}{1+g} d_{t-1} + x_t \quad d = Debt/GDP$$

系数 $\frac{1+r}{1+g}$ 变得收敛，直接挑战政府跨期预算约束绑定的原理，据此Blanchard提出**公共债务可能不存在财政成本**（ public debt may have no fiscal cost ）的主张

- ②即使不考虑公债的财政成本，公债也会通过降低社会总资本积累的方式减缓经济增长。然而，由于长期利率 r 本就较低，说明长期来看，资本积累带来的收益本就较小，对长期经济增长和福利代际转移带来的负面影响也较小

- ③强调了平均风险利率 (risky rate) 和无风险利率 (safe interest rate) 之间的差别。虽然实证数据中资本市场的收益率很高，但这是不确定的风险利率，反映变化波动较大的资本边际收益。而国债无风险利率 r 是资本市场收益率剔除风险升水后的确定性等价
- ④提出了一系列相反的论点和反思，主要聚焦在即使 $r < g$ ，还有什么原因会挑战本文的结论，如风险升水失真、未来经济波动、多重动态均衡的存在性和投资者情绪等等，是用于回应争议的部分
- 综上四点有论文的基本结论：**如果中性利率较低（这是实证中的常态）且利率的实际下限具有约束力，那就有充分的理由采取扩张性财政政策，而且债务增加带来的财政和福利成本可能低于预期。**Blanchard本人也对模型提出了质疑和优化方向。
- Blanchard的这篇演讲相当成功地设置了后续几年宏观财政政策讨论的议程，将学界的焦点转移到了宏观经济理论模型可能存在的革新上，催生了大量的后续文献（以及对应的批评）

第二部分：利率、增长率与债务展期

II. Interest rates, growth rates, and debt rollovers



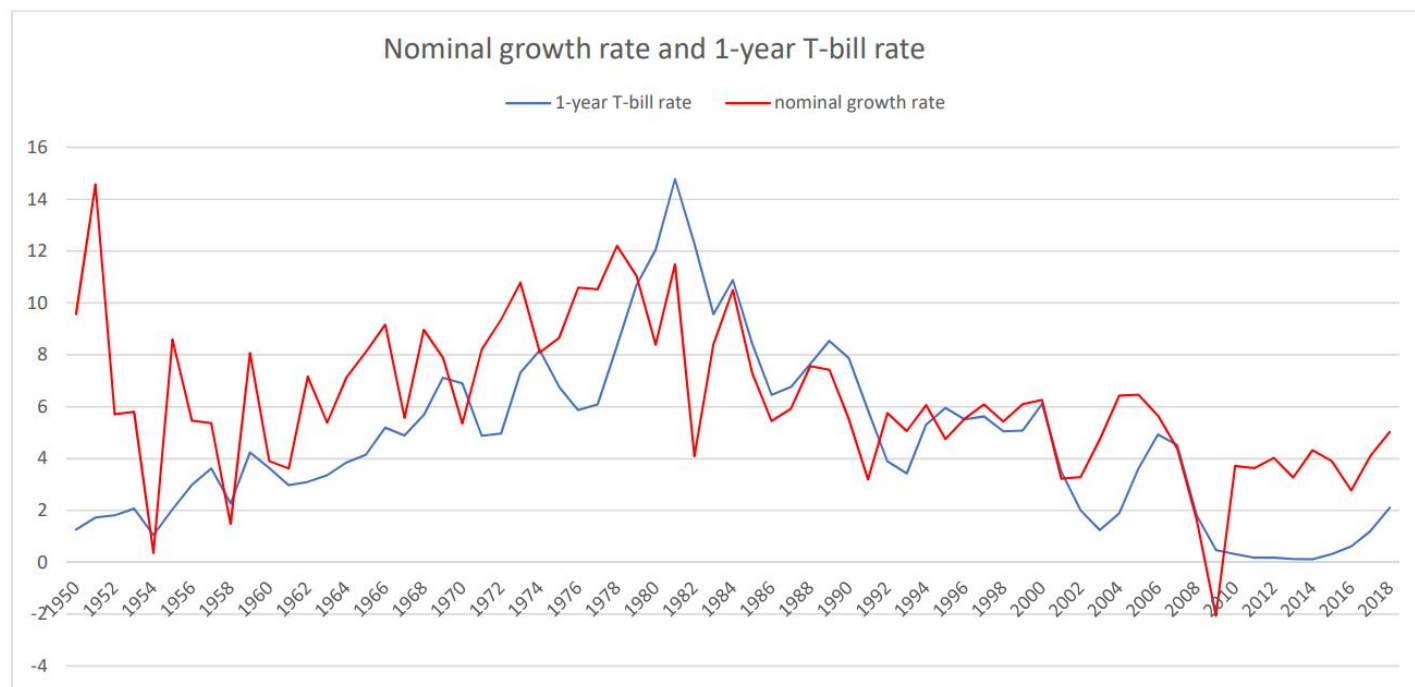


利率、增长率与债务展期——特征事实

- 截止演讲发表时，美国债券利率一直以来异常的低，部分反映了08年金融危机和量化宽松之后的影响。（2018年12月）1年期国库券名义利率为2.6%，远低于最近一次名义增长率4.8%（第二季度至第三季度，按年率计算）
- 两者之间的差距预计会缩小，但大多数预测和市场信号显示利率将在未来很长一段时期内低于增长率。长期停滞理论支持这种现象的持续，而发达经济体的老龄化、更好的社会保险或新兴市场储备积累较低等因素，可能导致未来利率上升
- Blanchard认为，从历史上看，美国政府的利率低于增长率($r < g$)更为普遍而非例外

利率、增长率与债务展期——特征事实

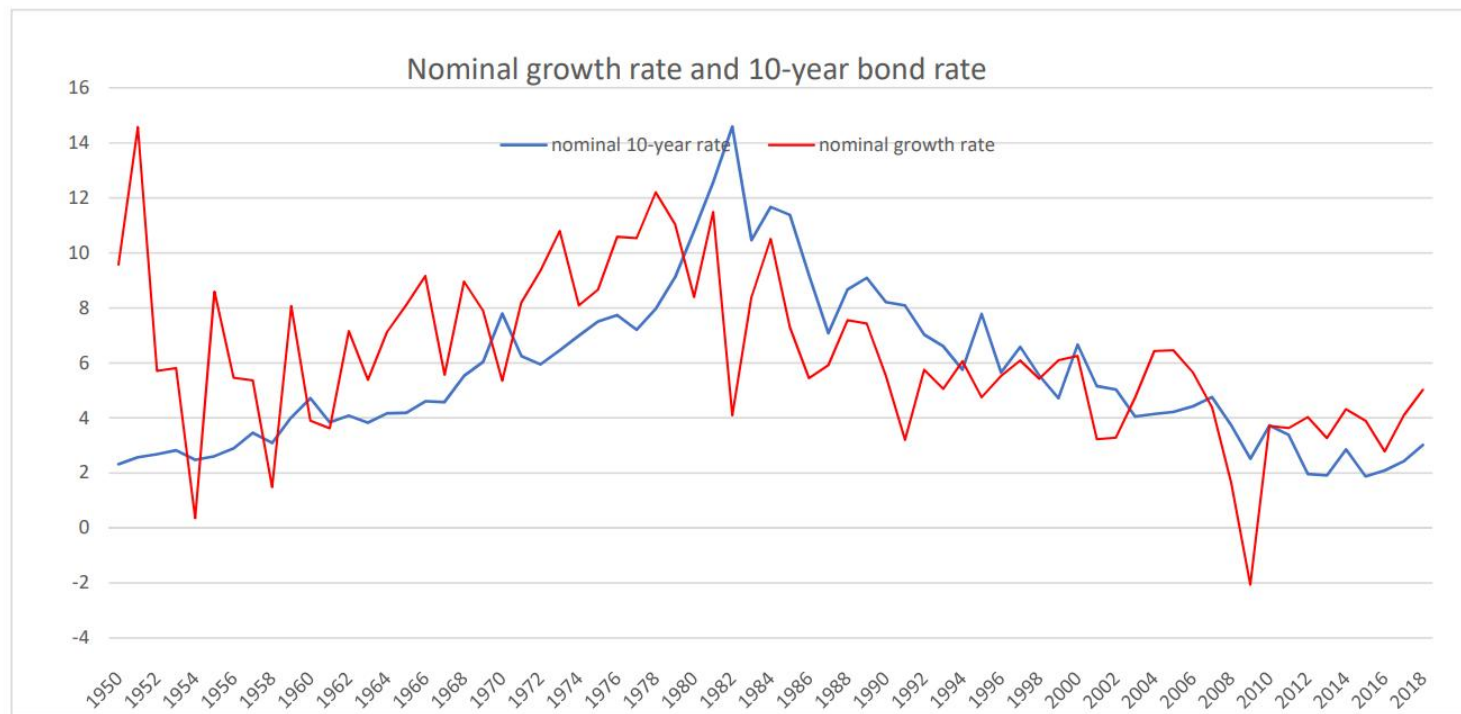
Figure 1. : Nominal growth rate and 1-year T-bill rate



- 1950年以来的美国经济数据（图1和图2）表明，除了在80年代反通胀期间和08年金融危机前后，一年期和十年期美国国库券收益率均低于名义经济增长率

利率、增长率与债务展期——特征事实

Figure 2. : Nominal growth rate and 10-year bond rate



- 1950年以来的美国经济数据（图1和图2）表明，除了在80年代反通胀期间和08年金融危机前后，一年期和十年期美国国库券收益率均低于名义经济增长率

利率、增长率与债务展期——实际利率指标构建

- 图1和图2中展示的利率并不是政府实际为债务支付的利率。为了使经验事实更加可信，Blanchard进行了三重调整以反映政府实际的债务展期成本：

- 第一重调整是政府债务的不同到期期限。利率期限结构告诉我们长期国债的收益率通常高于短期国债。为了得到一般化的利率指标，直接使用线性插值：

$$i_t = \alpha_t * i_{1,t} + (1 - \alpha_t) * i_{10,t}$$

- 其中 $\alpha_t = (10 - \text{average maturity in years})/9$
- 根据第 t 年的收益率和平均期限数据构造一个第 t 年的加权国债利率指标 i_t

利率、增长率与债务展期——实际利率指标构建

- 第二重调整是扣减政府债务票息的资本利得收入所得税。由于普通的投资者支取国债票息需要交税，故实际的国债利率比刚刚的利率指标 i_t 更小一些
- 方法是对照AAA级美国地方市政债券的收益率（Municipal Bond）计算1年期和10年期国债的隐含税率，然后加权：

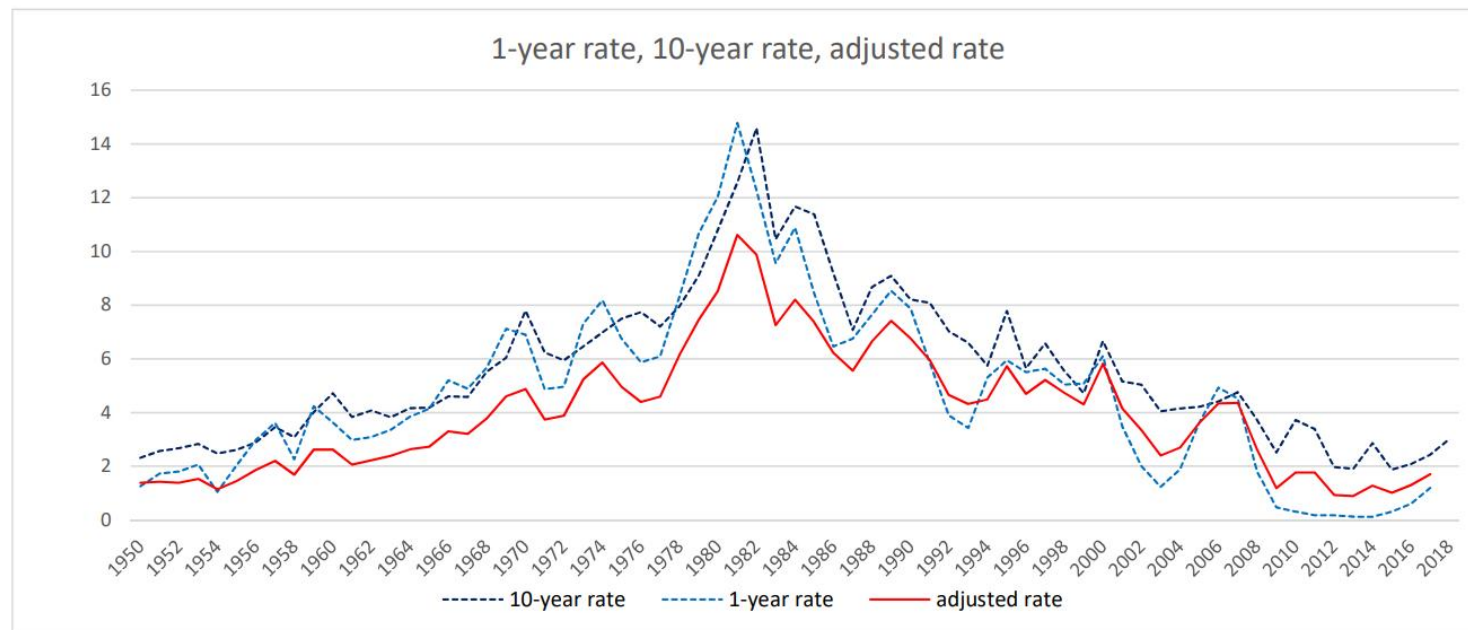
$$\tau_{1t} = 1 - \frac{i_{mt1}}{i_{1t}}, \tau_{10t} = 1 - \frac{i_{mt10}}{i_{10t}}$$
$$\tau_t = \alpha_t * \tau_{1,t} + (1 - \alpha_t) * \tau_{10,t}$$

- 不是所有投资者都要纳税（免税的持有者包括外国投资者和央行、联邦退休计划基金以及美联储）。对于每一年预估的应税投资者比例 β_t ，可以计算出调整后的利率指标

$$i_{adj,t} = i_t(1 - \tau_t * \beta_t)$$

利率、增长率与债务展期——实际利率指标构建

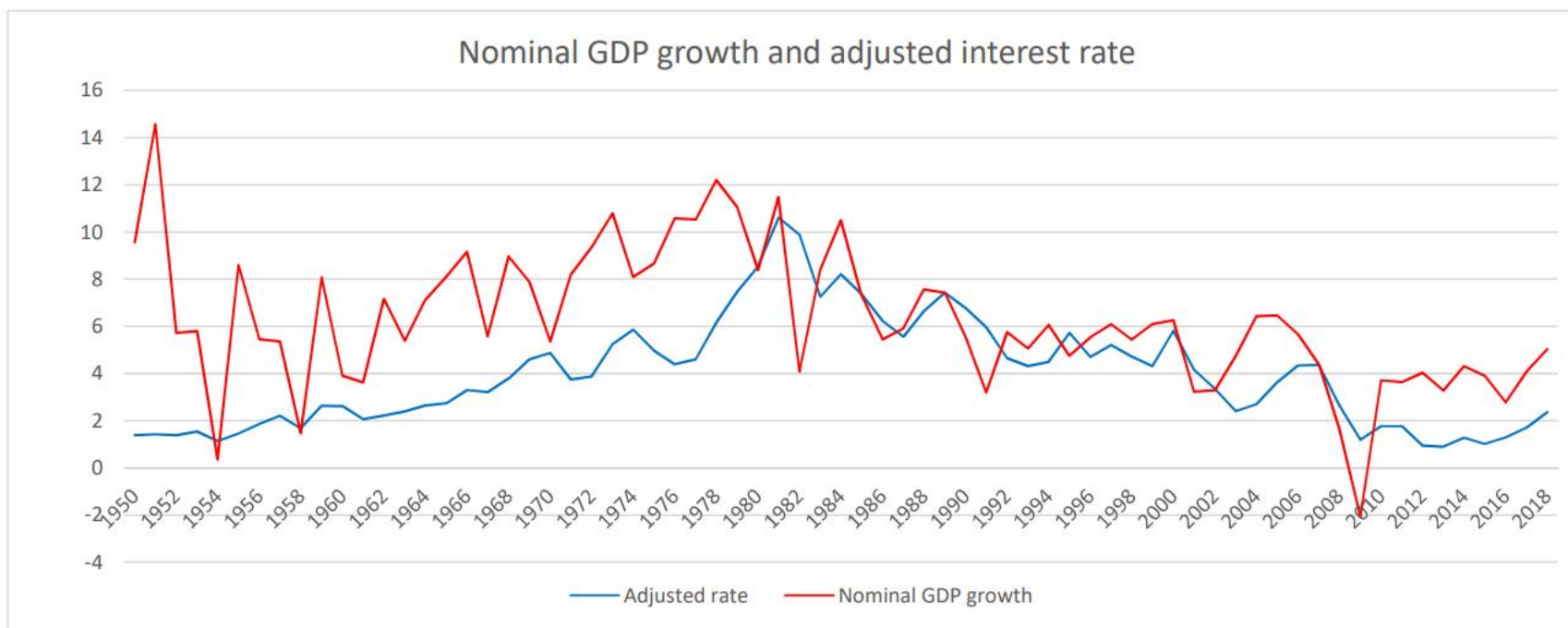
Figure 3. : 1-year rate, 10-year rate, and adjusted rate



- 图3是调整后国债利率 $i_{adj,t}$ （图中红线）与1年期和10年期国债收益率构建出的对比折线图。在金融危机后较长时间的低利率QE以前， $i_{adj,t}$ 大部分时间比两个利率都要低

利率、增长率与债务展期——实际利率指标构建

Figure 4. : Nominal growth rate and adjusted rate



- 图4是美国历史名义GDP增速（**红线**）和 $i_{adj,t}$ （**蓝线**）的对比。前者的历史均值在6.3%，而后者仅为3.8%，这是一个非常乐观的数字

利率、增长率与债务展期——债务展期模拟

- 单靠前两重调整还不足以回应所有的质疑。第三重调整是调整系数 $\frac{1+r_{adj,t}}{1+g_t}$ 随年份波动的影响
- 重新写出债务展期的动态转移方程：

$$d_t = \frac{1 + r_{adj,t}}{1 + g_t} d_{t-1} + x_t$$

- 由Jensen不等式，我们知道，在 $\ln\left(\frac{1+r_{adj,t}}{1+g_t}\right) \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时，债务占GDP比率遵循的增长路径不是 $\exp(\mu)$ ，而是略高一些的 $\exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$
- Blanchard测算指出， μ 的历史均值在 $-1\% \sim -2\%$ 左右，标准差约为2.8%，对应 $\sigma^2 \approx 0.08\%$ ，几乎可以忽略不计

利率、增长率与债务展期——债务展期模拟

- 更加直观的方式是进行反事实模拟，基本公式是

$$d_{t+n} = \left(\prod_{i=1}^n \frac{1 + r_{adj,t+i}}{1 + g_{t+i}} \right) d_t$$

- 以初始期的 d_t 指数为100进行反事实模拟，在新增债务为0的基准下进行展期有

Figure 5. : Debt dynamics, with zero primary balance, starting in year t .

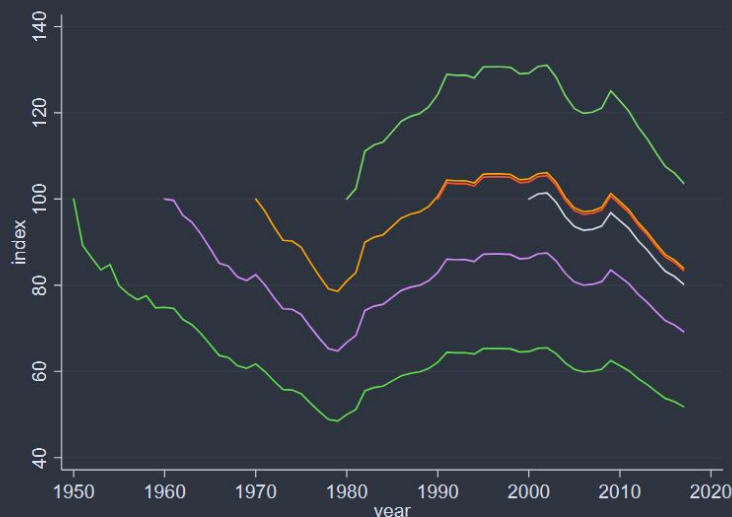
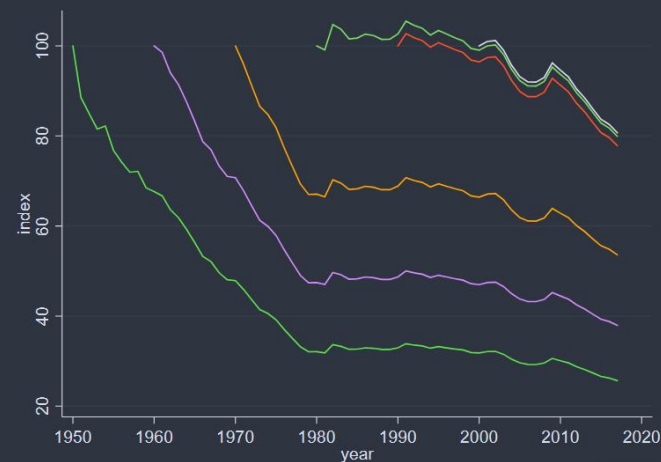


Figure 6. : Debt dynamics, with zero primary balance, starting in year t , using adjusted rate



第三部分：代际转移与福利

III. Intergenerational transfers and welfare





确定性条件下的世代交叠模型 (OLG)

假设经济中的个人生存两期，第一期工作，两期都消费。其效用函数为：

$$U = (1 - \beta)U(C_1) + \beta U(C_2)$$

其中 C_1 和 C_2 分别为第一期和第二期的消费。

第一期和第二期的预算约束为：

$$C_1 = W - K - D ; C_2 = R K + D$$

其中 W 为工资， K 为储蓄（等价于下一期的资本）， D 为从年轻人向老年人的转移支付， R 为资本收益率。

确定性条件下的世代交叠模型 (OLG)

忽略人口增长和技术进步，则增长率为零。生产函数为规模报酬不变的形式：

$$Y = F(K, N)$$

为方便起见，将劳动标准化为1，因此 $Y = F(K, 1)$ 。两种要素均按其边际产量获得报酬。

效用最大化的一阶条件为（关于K求导）：

$$(1 - \beta) U'(C_1) = \beta R U'(C_2)$$

转移支付D的小幅增加对效用的影响为（全微分，利用一阶条件消去dK）：

$$dU = [-(1 - \beta)U'(C_1) + \beta U'(C_2)] dD + [(1 - \beta)U'(C_1) dW + \beta K U'(C_2) dR]$$

确定性条件下的世代交叠模型 (OLG)

$$dU = [-(1 - \beta)U'(C_1) + \beta U'(C_2)] dD + [(1 - \beta)U'(C_1) dW + \beta K U'(C_2) dR]$$



记为 dU_a
代表转移支付的局部均衡直接效应



记为 dU_b
代表通过工资和资本收益率的内生变化产生的一般均衡效应

确定性局部均衡直接效应

$$dU_a = [\beta(-R U'(C_2) + U'(C_2))] dD = \beta(1 - R)U'(C_2) dD$$

如果 $R < 1$ （即所谓的“动态无效率”），忽略第二项的话，转移支付的小幅增加会提高福利。

如果 $R < 1$ ，转移支付给储蓄者的收益率高于资本的收益率。

*动态无效率：资本过度积累，高于黄金律的资本存量水平，导致经济效率下降

确定性一般均衡效应

$$dU_b = -[(1 - \beta)U'(C_1) - \beta U'(C_2)]K dR$$



一阶条件

$$dU_b = -[\beta(R - 1)U'(C_2)]K dR$$

如果 $R < 1$ ，转移支付的小幅增加会提高福利（资本存量下降导致利率上升）。根据要素价格前沿关系，资本减少会导致**第一期收入等额减少、第二期收入等额增加**，这种收入再分配比资本提供的收益率更具吸引力，因此会提高福利。

$$dU_b = -[\beta(R-1)U'(C_2)]K dR$$



$$\eta \equiv (F_K F_N) / F_{KN} F$$

$$\alpha = F_N / F$$

$$F_{NK} = -K F_{KK}$$

$$dU_b = [\beta(1/\eta)\alpha][(R-1)U'(C_2)]R dK$$

确定性效应分析

$$dU_a = [\beta(-R U'(C_2) + U'(C_2))] dD = \beta(1 - R)U'(C_2) dD$$

$$dU_b = [\beta(1/\eta)\alpha][(R - 1)U'(C_2)]R dK$$

- 两种效应的符号均取决于 $R-1$ 。如果 $R<1$ ，资本积累减少会提高效用。换句话说，如果资本边际产量低于增长率，代际转移在稳态下对福利有正向影响。
- 第二种效应的强度取决于替代弹性 η 。例如，如果 $\eta=1$ （即生产函数为线性），资本积累对工资和资本收益率均无影响，因此第二种效应为零。

不确定性条件下的世代交叠模型

- 现在引入生产的不确定性，因此资本边际产量是不确定的。
- 如果人们是**风险厌恶**的，平均安全利率将低于平均资本边际产量。
- 此时的基本问题变为： 评估福利效应时，应当关注**哪个利率**？是资本的平均边际产量 ER ，还是平均安全利率 ER_f ，抑或是其他某个利率？

不确定性条件下的世代交叠模型

在时间 t 出生的个人的期望效用为：

$$U = (1 - \beta)U(C_{1,t}) + \beta EU(C_{2,t+1})$$

其预算约束为：

$$C_{1t} = W_t - K_t - D \ ; \ C_{2t+1} = R_{t+1} K_t + D$$

生产函数为规模报酬不变的形式：

$$Y_t = A_t F(K_{t-1}, N)$$

其中 $N=1$ ， A_t 是随机变量（时间 t 的资本反映了时间 $t-1$ 年轻人的储蓄）

不确定性条件下的世代交叠模型

在时间 t ，效用最大化的一阶条件为：

$$(1 - \beta) U'(C_{1,t}) = \beta E [R_{t+1} U'(C_{2,t+1})]$$

定义影子安全利率 R_{t+1}^f ：

$$R_{t+1}^f E[U'(C_{2,t+1})] = E[R_{t+1} U'(C_{2,t+1})]$$

*如果有这么一个无风险资产，其收益率能够使得“未来消费的期望边际效用乘以该收益率”等于“未来随机收益与边际效用乘积的期望”，那么这个收益率就是影子安全利率。

不确定性条件下的世代交叠模型

考虑D的小幅增加对时间t效用的影响：

$$dU_t = [-(1-\beta)U'(C_{1,t}) + \beta EU'(C_{2,t+1})] dD + [(1-\beta)U'(C_{1,t}) dW_t + \beta K_t E(U'(C_{2,t+1}) dR_{t+1})]$$



记为 dU_{at}

代表转移支付的局部均衡直接效应



记为 dU_{bt}

代表通过工资和资本收益率的内生变化产生的一般均衡效应

不确定性局部均衡直接效应

$$dU_{at} = [-\beta E[R_{t+1} U'(C_{2,t+1})] + \beta E[U'(C_{2,t+1})]] dD$$



影子安全利率

$$dU_{at} = \beta(1 - R_{t+1}^f) E U'(C_{2,t+1}) dD$$

要判断转移支付通过这一渠道对福利的影响符号，相关利率是安全利率。
在任何 $R_{t+1}^f < 1$ 的时期，转移支付都会改善福利。

不确定性一般均衡效应

$$dU_{bt} = (1 - \beta)U'(C_{1,t}) dW_t + \beta E[U'(C_{2,t+1}) K_t dR_{t+1}]$$



要素价格前沿关系

$$dU_{bt} = -(1 - \beta)U'(C_{1,t}) K_{t-1} dR_t + \beta E[U'(C_{2,t+1}) K_t dR_{t+1}]$$

如果在 $K_t = K_{t-1} = K$ 且 $dK_t = dK_{t+1} = dK$ 处进行评估，利用与确定性情况相同的步骤，可将其改写为：

$$dU_{bt} = \left[\beta \frac{1}{\eta} \alpha \right] E \left[\left(R_{t+1} - \frac{R_{t+1}}{R_t} \right) U'(C_{2,t+1}) \right] R_t dK$$

或：

$$dU_{bt} = \left[\beta (1/\eta) \alpha \right] E \left[R_{t+1} U'(C_{2,t+1}) \right] (R_t - 1) dK$$

不确定性效应分析

- 因此，评估转移支付通过这一渠道对福利的影响符号时，**相关利率是风险利率，即资本边际产量**。如果 $R_t < 1$ ，投入价格变化带来的隐含转移会提高效用；如果 $R_t > 1$ ，隐含转移会降低效用。
- 风险利率之所以重要是因为资本的收益率为 R_{t+1} 。资本减少导致的价格变化，代表了一种收益率为 R_{t+1}/R_t 的隐含转移。因此，这种隐含转移是否能提高效用，取决于 R_t 是小于还是大于1。
- 将两组结果结合起来：如果安全利率小于1，而风险利率大于1——**这似乎正是当前的情况**——那么两项效应的方向相反：第一项意味着债务增加会提高福利，第二项意味着债务增加会降低福利。因此，两种利率都具有相关性。

不确定性效应分析

为了了解两种效应的相对大小，进而判断哪种效应可能占主导，进行以下近似：
在安全利率和风险利率的平均值处评估两项

$$dU/dD = [(1 - ER^f) - (1/\eta) \alpha ER^f (ER - 1)] \beta E[U'(C_2)](-dK/dD)$$

因此：

$$\text{sign } dU \equiv \text{sign} [(1 - ER^f) - (1/\eta) \alpha ER^f (-dK/dD)(ER - 1)]$$

其中，根据资本积累方程，有以下近似：

$$dK/dD \approx -\frac{1}{1 - \beta \alpha (1/\eta) ER}$$

不确定性效应分析

如果生产函数是线性的（ η 为无穷大），方程中的第二项为零，此时唯一相关的利率是 ER_f 。因此，如果 $ER_f < 1$ ，更高的转移支付会提高福利。随着替代弹性变小，价格效应变强，最终福利效应会改变符号并变为负。

$$\text{sign } dU \equiv \text{sign} [(1 - ER^f) - (1/\eta)\alpha ER^f (-dK/dD)(ER - 1)]$$



$$ER \approx (1-\alpha)/(\alpha\beta)$$

$$\text{sign } dU \equiv \text{sign} [(1 - ER^f) - ER]$$

即使平均风险利率很高，只要安全利率足够低，期望效用也可能增加。
上述分析表明，转移支付的福利效应不一定是负的，即使为负，也可能不大。

第四部分：数值模拟

IV. Simulations. Transfers, debt, and debt rollovers



4.1 代际转移分析：模型设定

基础框架：两期世代交叠模型

设定：每个人生存两期，第一期工作（年轻人），第二期退休（老年人）；

假定经济增长率 $g=0$ （简化计算，不影响结论的一般性）

效用函数：Epstein-Zin-Weil对数形式

$$U = (1 - \beta) \ln C_{1,t} + \beta \frac{1}{1 - \gamma} \ln E (C_{2,t+1}^{1-\gamma})$$

U =消费的效用权重*跨期替代效应为1下的第 t 期年轻人工作期的消费+25年期的贴现因子*退休期消费的风险调整期望效用。
替代弹性为1， γ 是相对风险厌恶系数，能分离 "跨期替代" 和 "风险厌恶" 两个机制。

生产函数：CES形式

$$Y_t = A_t (bK_{t-1}^\rho + (1 - b)N^\rho)^{1/\rho} = A_t (bK_{t-1}^\rho + (1 - b))^{1/\rho}$$

A_t ：为技术冲击，对数服从正态分布

η ：为资本-劳动替代弹性。当 $\eta = \infty$ 时 $\rho=1$ 得到线性情况，柯布道格拉斯是 η 趋于1时的极限情况

b ：为资本份额

ρ ： $\rho=(\eta-1)/\eta$

代际转移分析：模型设定（续）

- 工资和资本回报率为：

$$W_t = A_t(1 - b)\left(\frac{Y_t}{A_t N_t}\right)^{1-\rho} = A_t(1 - b)\left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{1-\rho} \equiv W(K_{t-1}, A_t)$$

$$R_t = A_t b \left(\frac{Y_t}{A_t K_{t-1}}\right)^{1-\rho} \equiv R(K_{t-1}, A_t) \qquad R_{t+1} = A_{t+1} b \left(\frac{Y_{t+1}}{A_{t+1} K_t}\right)^{1-\rho} \equiv R(K_t, A_{t+1})$$

非随机禀赋X

- 设定：年轻人除了工资 W_t 外，还获得一个固定的非随机禀赋X，大小等于平均工资的100%。
- 技术冲击 A_t 是随机的，因此工资 W_t 也是随机的，可能出现极端低工资的情况。如果没有非随机禀赋，当工资过低时，年轻人可能无法支付代际转移D，导致模型无解。加入X是为了保证转移支付的可行性，是一个技术性但必要的假设

核心参数校准

- 资本份额 b ：取值1/3。依据为美国长期资本收入占gdp比重。
- 年技术冲击标准差 σ_a ：0.2，后文会解释这是一个折衷选择。
- 净风险利率（资本边际产量）与 g 的差值：0%-4%（对应25年期总收益率1.00-2.66）；
- 年净无风险利率与 g 的差值：-2%-1%（对应25年期总收益率0.60-1.28）

为了匹配这两个利率，需要校准三个参数： β （时间贴现因子）、 μ （技术冲击均值）、 γ （风险厌恶系数）。

（1） β 和 μ 的校准：分别对应两种生产函数

线性生产（ $\eta=\infty$ ）：资本边际产量 $r_r = A_t * b$ ，与资本存量无关，仅由技术冲击 A_t 决定。因此 μ 直接决定平均 r_r ，选择 μ 来匹配目标 r_r 即可。

柯布-道格拉斯生产（ $\eta=1$ ）：资本边际产量 $r_r = (1 - b)Y/K$ ，与技术冲击均值 μ 无关，仅由资本存量决定，而资本存量由时间贴现因子 β 决定（越耐心，储蓄越多，资本越多， r_r 越低）。因此选择 β 来匹配目标 r_r 即可。

核心参数校准（续）

■ (2) γ 的校准：匹配风险溢价

参数 γ 与 σ 一起决定风险利率与之间的利差无风险利率，在没有转移支付的情况下，模型中风险溢价 ($r_r - r_f$) 满足：

$$\ln r_f - \ln E[r_r] = -\gamma \sigma^2$$

即风险溢价= $\gamma \times \sigma^2$ ， σ 为全要素生产率（TFP）的标准差。

这里就遇到了著名的股权/风险溢价之谜：

- 1.现实中：全要素生产率（TFP）的年标准差 σ 约为2%，那么25年期 $\sigma=10\%$ ， $\sigma^2=1\%$ ；
现实中美国股市的年风险溢价约为5%，25年期，如果累加计算，为1.25
代入 风险溢价= $\gamma \times \sigma^2$
得 $\gamma=125$ ，这显然不符合现实（合理的 γ 应在1~10之间）。
- 2.用股票年收益率的标准差（历史约15%）替代：计算出 γ 约为2.5
- 3.折衷方案：取25年期 $\sigma=20\%$ ，则 $\sigma^2=4\%$ ，此时 $\gamma \approx 4.7$ ，处于合理区间。

模拟基准：无代际转移或债务时的运动方程

- 对于D=0时，动态方程为：

$$\begin{aligned}K_t &= \beta(X + W(K_{t-1}, A_t)) \\C_{1t} &= (1 - \beta)(X + W(K_{t-1}, A_t)) \\c_{2t+1} &= \beta(X + W(K_{t-1}, A_t))R(K_t, A_{t+1})\end{aligned}$$

无风险利率和风险利率的关系为

$$\ln r_f - \ln E[r_r] = -\gamma \sigma^2$$

在无代际转移和无债务的基准经济中，作者没有直接解析求解 β, μ, γ ，而是通过校准使模型生成给定的平均风险回报 ER 和平均安全回报 ER^f 。其中， γ 由安全利率和风险利率之间的差值决定，即 $\gamma = \ln(ER/ER^f)/\sigma^2$ 。而 β 和 μ 通过基准资本积累方程和资本回报函数进行数值求解，使模拟得到的平均资本边际产出等于目标风险利率 ER 。

模拟基准：存在代际转移时的运动方程

- 由效用函数最大化一阶条件以及代入预算约束条件可以得出资本积累的动态方程：

$$\frac{1-\beta}{C_{1t}} = \beta \cdot \frac{E[C_{2t+1}^{-\gamma} R_{t+1}]}{E[C_{2t+1}^{1-\gamma}]}$$

代入消费表达式：

$$\begin{aligned} C_{1t} &= X + W_t - K_t - D \\ C_{2,t+1} &= R_{t+1}K_t + D \end{aligned}$$

由此一阶条件可以写为：

$$\frac{1-\beta}{X+W_t-K_t-D} = \beta \frac{E_t[R_{t+1}(R_{t+1}K_t + D)^{-\gamma}]}{E_t[(R_{t+1}K_t + D)^{1-\gamma}]}$$

这个方程不能直接解析求出 K_t ，作者采用了数值求解的方法

模拟过程：存在代际转移时的运动方程（续）

- 由一阶条件可得：

$$K_t = K(W_t, D)$$

文中用三阶多项式近似这个函数。因此动态方程变成：

$$K_t = K(W(K_{t-1}, A_t), D)$$

这就是代际转移模拟中资本随着时间演化的核心方程

最后将年轻期和年老期消费方程

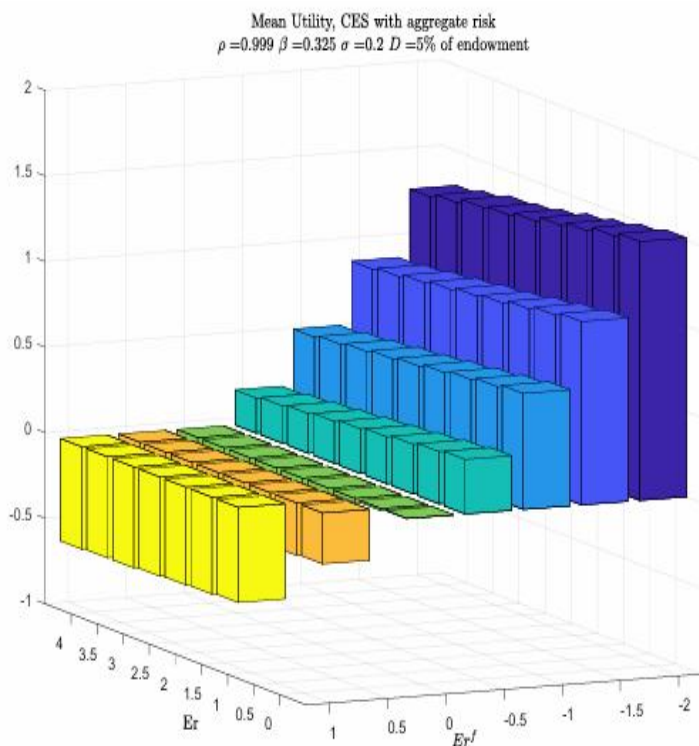
$$C_{1t} = X + W(K_{t-1}, A_t) - K_t - D$$

$$C_{2,t+1} = K_t R(K_t, A_{t+1}) + D$$

代入Epstein-Zin-Weil 效用函数，比较有无 D 时的稳态福利。作者对每组 (ER, ER^f) 生成 2000 个 A 的实现序列，计算平均福利变化。结果报告在图7至图10中。

核心结果：线性生产函数下，5%禀赋转移的福利效应

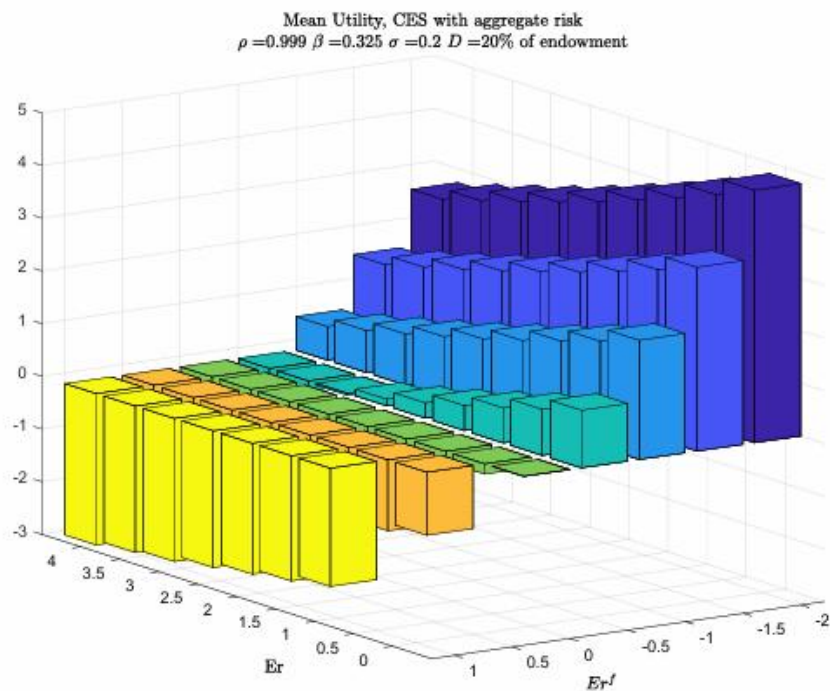
Figure 7.: Welfare effects of a transfer of 5% of the endowment (linear production function)



- **基本设定：**该结果基于线性的生产函数即设定 $\rho=0.999$ ，此时资本与劳动完全替代，间接福利效应=0（资本积累不影响工资和利率），只剩下直接代际收入分配效应。转移规模 $D=5\%$ → 年轻人将自己5%的禀赋转移给当期老年人，规模很小。
- **关键特征：**福利变化几乎完全相关于 Erf 轴，与 Er 轴无关。当 $Erf < 0$ （无风险利率低于增长率）时，所有区域都是冷色调（正福利）；当 $Erf > 0$ 时，所有区域都是暖色调（负福利）。验证了线性生产下，间接效应为0，总福利只由直接效应决定，而直接效应的唯一决定因素是 Erf 。当 $Erf < 0$ ，转移支付给老人的收益率高于资本的风险调整收益率，因此提高福利反之则降低福利。
- **该设定下的结论：**只要无风险利率低于增长率，小额代际转移或者小额公共债务就一定会提高长期福利，与资本的边际产量的高低无关。

核心结果：线性生产函数下，20%禀赋转移的福利效应

Figure 8. : Welfare effects of a transfer of 20% of the endowment (linear production function)

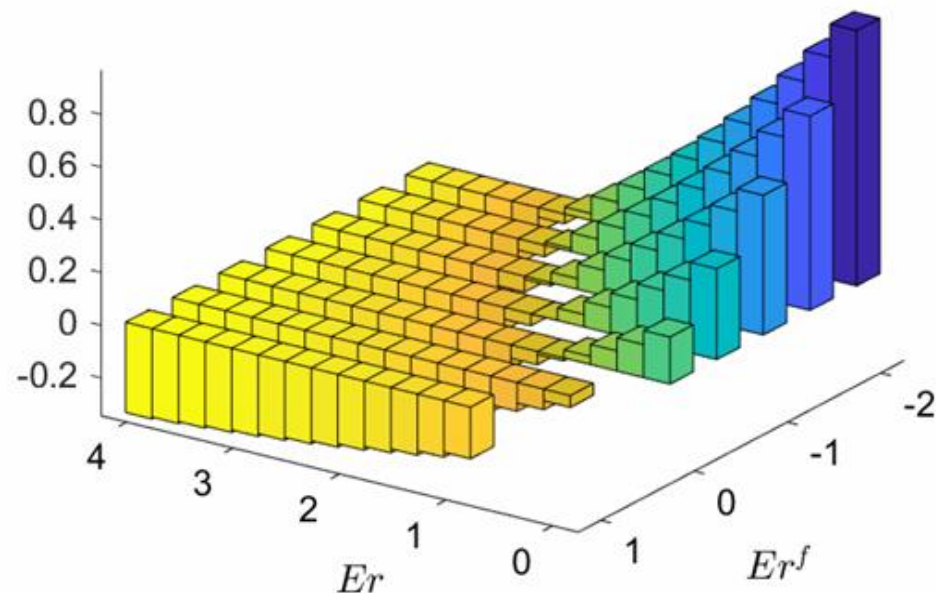


- **基础设定：**和图7相同的线性生产函数形式，转移规模扩大4倍到20%，属于大额转移。
- **与图7的特征对比：**不变的是福利变化仍然受 Erf 主要影响，可以看出 Er 有较小的影响，但是远小于 Erf 的影响。变化的是纵轴的范围增大，意味着转移规模增大对福利的规模会带来同向的影响。另外图中出现了非线性情况：高 Er 区域出现了“ $Erf < 0$ 但福利为负”的例外情况，当 $Erf = -1\%$ 且 $Er > 3\%$ 时，福利已经变为负的（橙色区域）；当 $Erf = -0.5\%$ 且 $Er > 2\%$ 时，福利也变为负的。
- 可以这样解释：大额转移支付会改变经济中的风险结构，进而推高无风险利率本身，年轻人向老年人转移的收入越多，自己的储蓄就越少，持有的风险资本越少，持有的安全债务越多；这会降低第二期消费的整体风险，投资者要求的风险溢价（ $Er - Erf$ ）会下降，直接推高无风险利率 Erf （因为 $Erf = Er - \text{风险溢价}$ ）
- **核心结论：**债务的福利效应是非线性的：小额债务可能明确提高福利，但债务规模过大时，会通过推高无风险利率的机制，反而降低福利——即使在间接效应为0的线性生产下也是如此

核心结果：C-D生产函数下，5%禀赋转移的福利效应

Figure 9. : Welfare effects of a transfer of 5% of the endowment. Cobb-Douglas

Mean Utility, Cobb Douglas OLG with aggregate risk
 $\mu = 3 \quad \sigma = 0.2 \quad D = 5\% \text{ of endowment}$

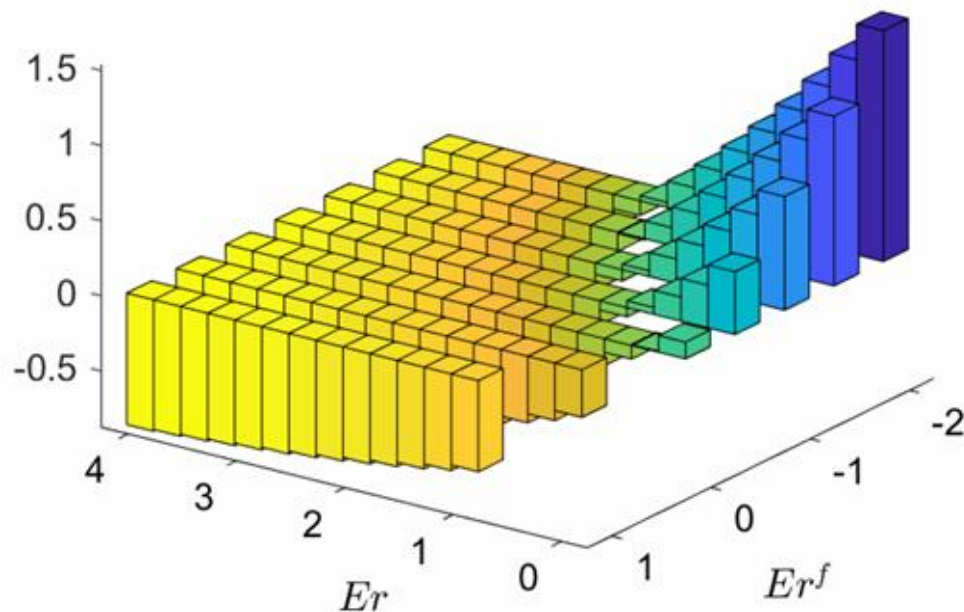


- **基本设定：**柯布道格拉斯生产 ($\rho=0 \rightarrow$ 资本与劳动替代弹性 $\eta=1$)，更近似于现实，间接复利效应存在，小规模转移： $D=5\%$
- **图形特征：**福利变化同时沿着 Er 和 Er^f 两个轴倾斜，双利率共同决定结果， Er^f 和 Er 越低，福利效应越高。验证了前面的双利率理论
- **一些正福利阈值：**当 $Er^f=-2\%$ （无风险利率比增长率低2%）时，只要 $Er<3.3\%$ （风险利率比增长率高不超过3.3%），福利就是正的；当 $Er^f=-1\%$ （无风险利率比增长率低1%）时，只要 $Er<1.7\%$ （风险利率比增长率高不超过1.7%），福利就是正的。
- **核心结论：**现实经济中，公共债务的福利效应不是非黑即白的，而是取决于无风险利率和风险利率的相对水平：无风险利率越低、资本边际产量越低，债务越可能提高福利

核心结果：C-D生产函数下，10%禀赋转移的福利效应

Figure 10. : Welfare effects of a transfer of 10% of the endowment. Cobb Douglas

Mean Utility, Cobb Douglas OLG with aggregate risk
 $\mu = 3$ $\sigma = 0.2$ $D = 10\%$ of endowment



- **基本设定：**和上一张相同，转移规模扩大1倍， $D=10\%$
- **与图9的特征对比：**仍符合双利率的共同作用，福利效应的绝对值受转移规模扩大而增加，但是正福利的区域明显缩小，阈值大幅降低： $Erf=-2\%$ 时， Er 只要超过2.3%，福利就变为负的； $Erf=-1\%$ 时， Er 只要超过1.5%，福利就变为负的。
- **可能有两重原因：**第一重（与线性生产相同）是转移规模扩大推高无风险利率 Erf ，削弱直接正效应；第二重（柯布-道格拉斯特有）是导致资本存量减少更多，而资本减少会推高风险利率 Er ，进一步放大间接负效应。两者叠加，使得总效应更容易转为负，因此对 Er 的要求更严格。
- **核心结论：**在现实经济中，债务规模越大，对资本边际产量的容忍度就越低：小额债务可以在较高的资本边际产量下仍提高福利，但中等或大额债务只有在资本边际产量较低时才是合意的。

4.2 债务展期分析：模型设定

1. 居民生命周期预算约束

年轻时消费方程：

$$C_{1t} = W_t + X - (K_t + D_t)$$

退休时消费方程：

$$C_{2,t+1} = R_{t+1}K_t + D_tR_{t+1}^f$$

方程释义：年轻人的消费等于当期工资(W_t)加上固定保底禀赋(X)，扣除风险资本(K_t)与无风险国债(D_t)两类储蓄；退休后消费则完全依赖两类储蓄的本息回报。

2. 债务动态转移方程

$$D_t = R_t^f \cdot D_{t-1}$$

注：下期债务规模取决于本期债务与无风险利率(R^f)的乘积。若 $R^f < 1$ （即年化 $r^f < 0$ ，负利率环境），债务会自然缩水；若 $R^f > 1$ （即年化 $r^f > 0$ ），债务将进入被动膨胀通道。这揭示了利率水平是决定债务可持续性的核心变量。



债务展期数值模拟依据

基于以下方程，可以对**债务-储蓄比率 (Debt/Saving)**，以及相对于无债务时的**福利效用(Utility)**进行数值模拟，观察他们的演变，以检验长期可行性：

$$U = (1 - \beta) \ln C_{1,t} + \beta \frac{1}{1 - \gamma} \ln E(C_{2,t+1}^{1-\gamma})$$

$$Y_t = A_t (bK_{t-1}^\rho + (1 - b)N^\rho)^{1/\rho} = A_t (bK_{t-1}^\rho + (1 - b))^{1/\rho}$$

$$R_{t+1}^f = f(K_t, Q_t), \quad W_t = A_t (1 - b) \left(\frac{Y_t}{A_t N_t} \right)^{1-\rho} \equiv W(K_{t-1}, A_t)$$

$$R_t = A_t b \left(\frac{Y_t}{A_t K_{t-1}} \right)^{1-\rho} \equiv R(K_{t-1}, A_t)$$

$$C_{1t} = W_t + X - (K_t + D_t), \quad C_{2t+1} = R_{t+1} K_t + D_t R_{t+1}^f$$

$$D_t = R_t^f D_{t-1}, \quad S_t = K_t + D_t$$

初始D/S: D_0 : 16.875% 禀赋

(参考美国现有约80%的债务/GDP比例及社保体系现状，贴合现实财政债务结构背景)

基准年化安全利率 $E(r^f)$: -1%

校准依据贴近美国现实长期无风险利率水平，反映当前低利率乃至负利率的宏观金融环境特征。

基准年化风险利率 $E(r)$: 2%

该数值对应美国企业资本长期平均收益率，作为风险资产投资回报的核心参考基准。

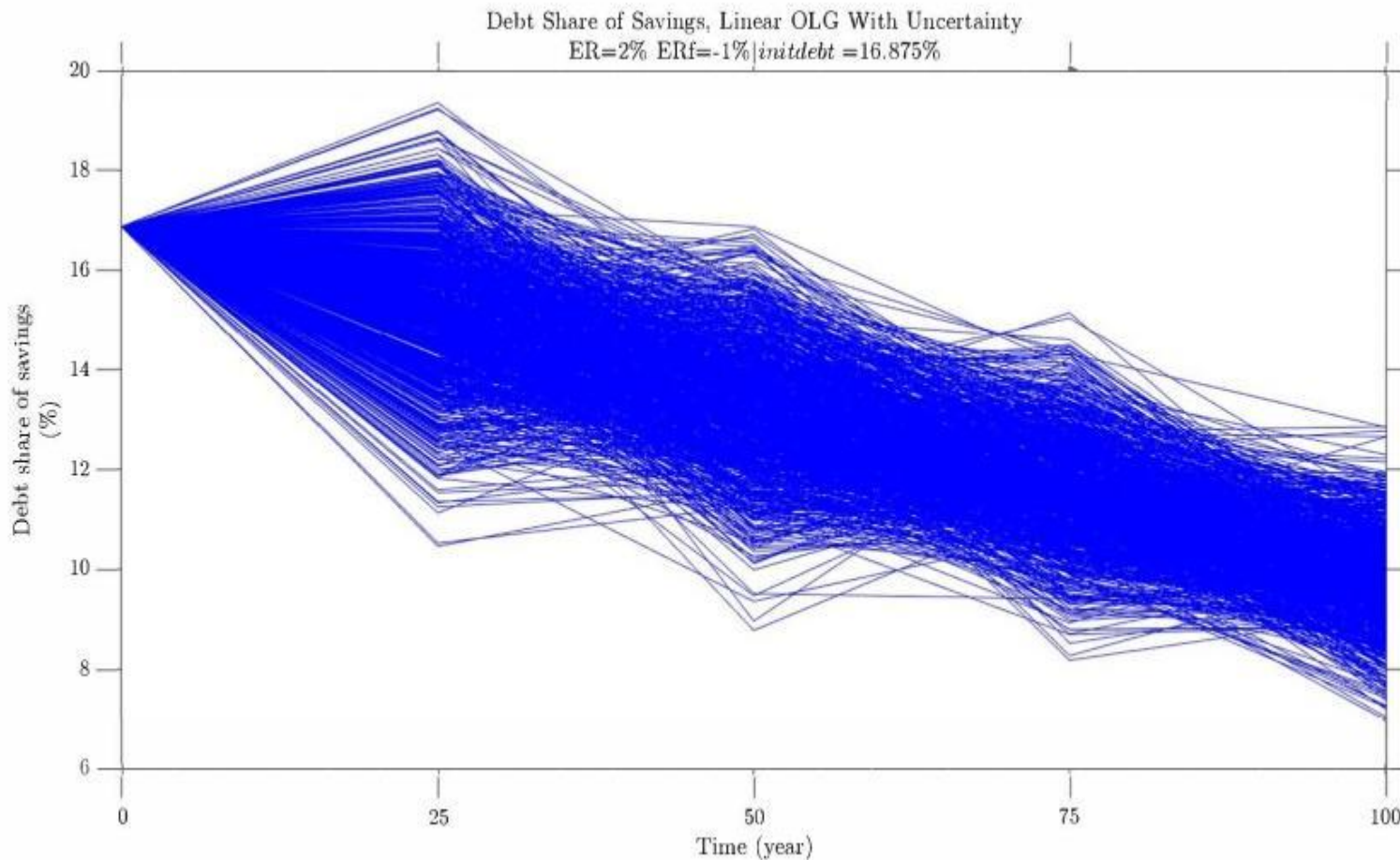
经济增长率 (g) : 0%

债务阈值: $r^f = 1\%$ (对应25年累计 $R^f \approx 1.28$)，一旦突破该阈值，债务规模将进入指数级增长阶段。如果超过阈值，作者（再次任意地）假设通过对年轻人征税来全额偿还债务，整个利率展期滚动（新债还旧债）暂停。

模拟方式:

执行1000次蒙特卡洛模拟，每次模拟基于5次（150年）对数正态分布的 TFP 随机冲击 A_t 的冲击。

线性生产下的债务演化路径分析



Title: Debt Share of Savings, Linear OLG With Uncertainty

安全阈值: 对应的 $r^f > 1\%$ 标红, $r^f < 1\%$ 标蓝

从图中:

- 在线性生产情形下, 更高的债务和更低的资本积累对风险利率无影响, 对无风险利率的影响也有限, 因此所有路径的债务均呈下降趋势。4期 (100年) 后, 所有路径的债务水平平均低于初始值, 并远低于设定的安全值。

原因:

$$Y_t = A_t (bK_{t-1}^\rho + (1-b))^{1/\rho}, \quad \rho = (\eta - 1)/\eta$$

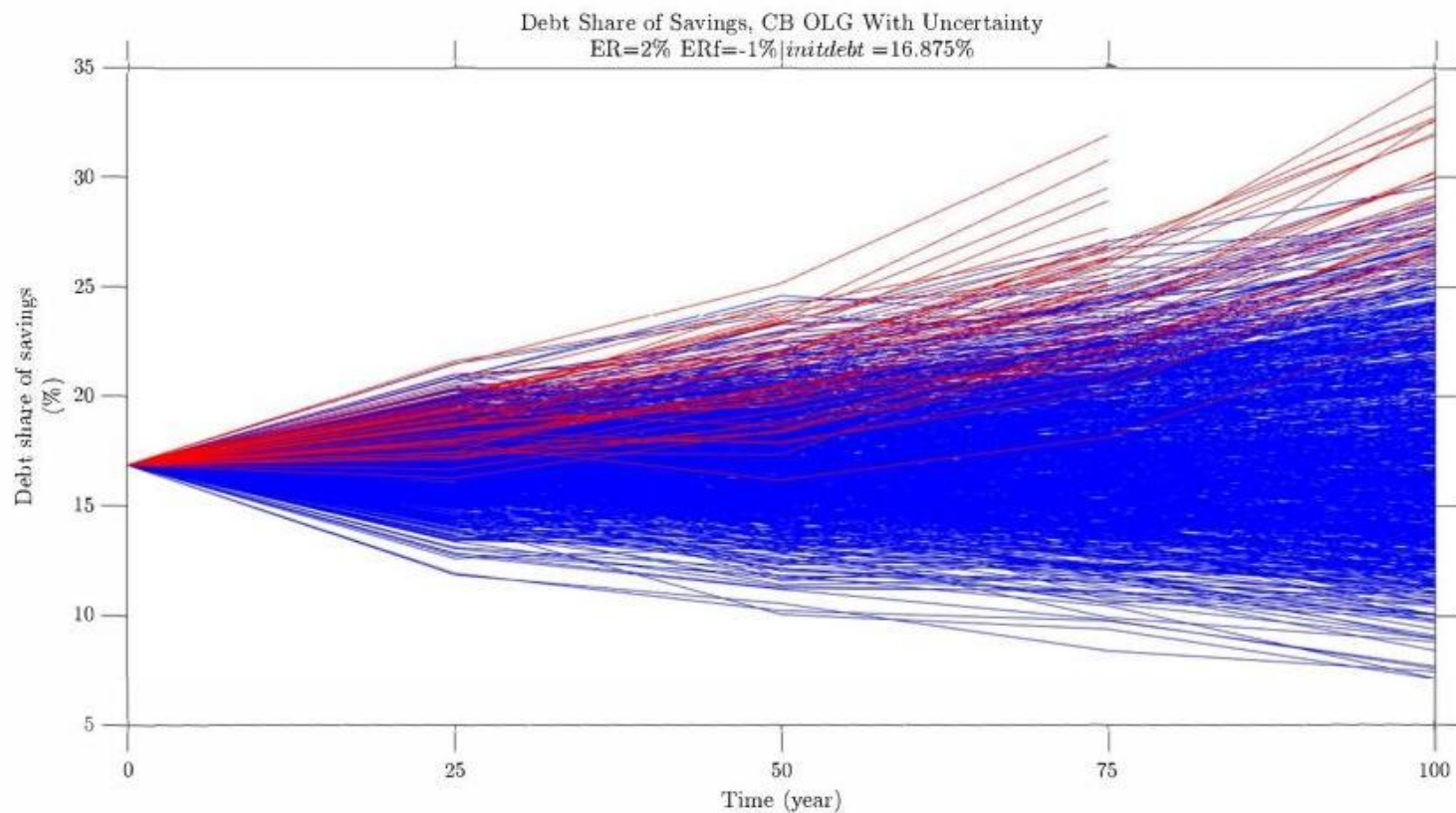
$$\text{此时 } \rho \text{ 为 } 1, \quad R_t = A_t b \left(\frac{Y_t}{A_t K_{t-1}} \right)^{1-\rho} = A_t b$$

与债务和资本积累无关

结论:

- 在安全利率长期低于经济增长率 ($r^f < g$) 和线性生产的假设下, 债务展期是可持续的: 即使存在随机技术冲击, 长期债务也会自然下降, 不会出现债务急剧膨胀的现象, 政府不需要通过加税来偿还债务

CD生产函数下的债务演化路径与风险机制



- **95%成功路径：**大部分债务演化路径呈现蓝色趋势，对应的无风险利率没有超过设定的阈值。
- **5%失败路径：**少数红色路径对应的无风险利率超过设定的阈值。

回忆：

$$Y_t = A_t (bK_{t-1}^\rho + (1-b))^{1/\rho}, \quad \rho = (\eta - 1)/\eta$$

η 为1时，生产函数退化为：

$$Y_t = A_t K_{t-1}^b N^{1-b}$$

$$R_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_{t-1}} = b \cdot A_t \cdot K_{t-1}^{b-1}$$

也可以写成更直观的形式：

$$R_t = b \cdot \frac{Y_t}{K_{t-1}}$$

失控的传导机制：给定相同的无债务时的ER和ERf，负面冲击会导致债务上升和资本积累减少，进而推高风险利率 R_t ，并因此更大幅度地推高无风险利率，并逐渐超过了经济增长率 g （此时 $r > g$ ）。结果是，债务的迅速膨胀。对于相同的冲击序列，前4期（100年）内有5%的路径失败。

债务展期的福利效应来源

一、与现收现付社保的对比

- **现收现付社保**：年轻人缴费额度为 D ，老年人直接获得等额转移支付 D ，回报率为1，通常高于 R^f ，保障了代际间的等额财富转移。
- **债务展期模式**：年轻人购买国债额度为 D ，老年人获得的收益为 $D \cdot R^f$ （ R^f 为国债无风险利率），且 $R^f < 1$ ，这使得债务展期的直接福利转移效率显著低于现收现付社保体系。

二、债务展期两类福利效应

- **正向福利效应**：
 1. 债务展期初始初始代一次性获得的转移支付。
 2. 后代居民通过配置安全国债获得的边际内（infra-marginal）风险分散收益。
- **负向福利效应（工资和资本回报率变化）**：政府债务扩张挤出私人资本，通过要素价格压低工资、推高资本回报率；在资本边际产品（风险利率）高于经济增长率时，居民终身福利呈现净损失。（第三部分的结论）

两种生产函数下福利演化路径对比

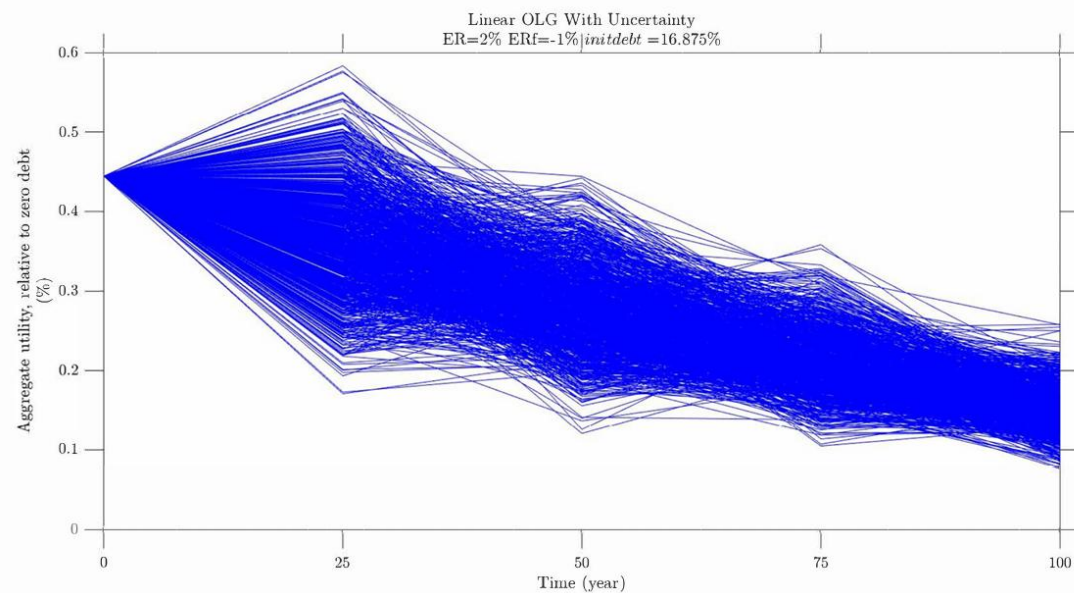


图13: 线性生产福利演化路径

- **基准参数:** 初始债务16.875%，年化风险利率2%，安全利率-1%。
- **直观信息:** 所有路径始终为正，初始福利较大，整体趋势缓慢向下，100年后集中在0.1%-0.25%区间。
- **核心结论:** 无资本挤出效应，正的净效用来自资产配置优化下的风险分散，以及债务展期初期获得的代际转移；但后续的福利效应会因本息的降低（无风险利率为负）有所下降

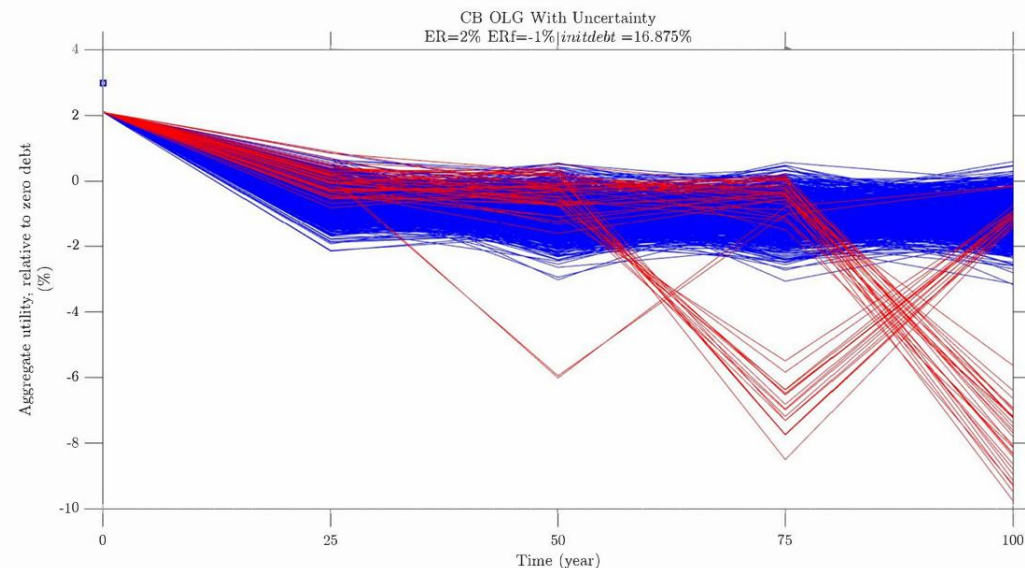


图14: 柯布-道格拉斯生产福利演化路径

- **基准参数:** 初始债务16.875%，年化风险利率2%，安全利率-1%。
- **直观信息:** 初始福利2%，蓝色路径长期稳定在0附近，红色路径断崖式下跌，下跌第二期又会回到0附近。
- **核心结论:** CD生产函数下，由于资本挤出效应推高风险利率进而推高无风险利率，存在很多债务展期失败的路径；资本挤出带来的负效应使得整体福利效用减少，并低于无债务时的效用。

结论：债务展期

- 1.在本论文框架下，资本-劳动替代弹性 (η) 是决定债务展期表现的关键变量。
- 2.替代弹性越大，债务增发带来的资本挤出对利率的影响越弱，债务展期的可持续性越强，福利表现也越好；
- 3.替代弹性越小，债务增发带来的资本挤出对利率的影响越强，不仅失败概率上升，整体福利也可能会更差。
- 本质上，这种债务政策，就是一场代际间的庞氏 (Ponzi) 赌博（这也是学界对美国债务政策的经典批评）。它是否具备政策价值，最终取决于政策制定者的社会贴现因子：如果同等看待当代与后代福利，债务展期往往得不偿失；如果更看重当代人的福利，初始代的大幅改善可能会覆盖后代的持续损失。

第五部分：收益与边际产出

V. Earnings versus marginal products



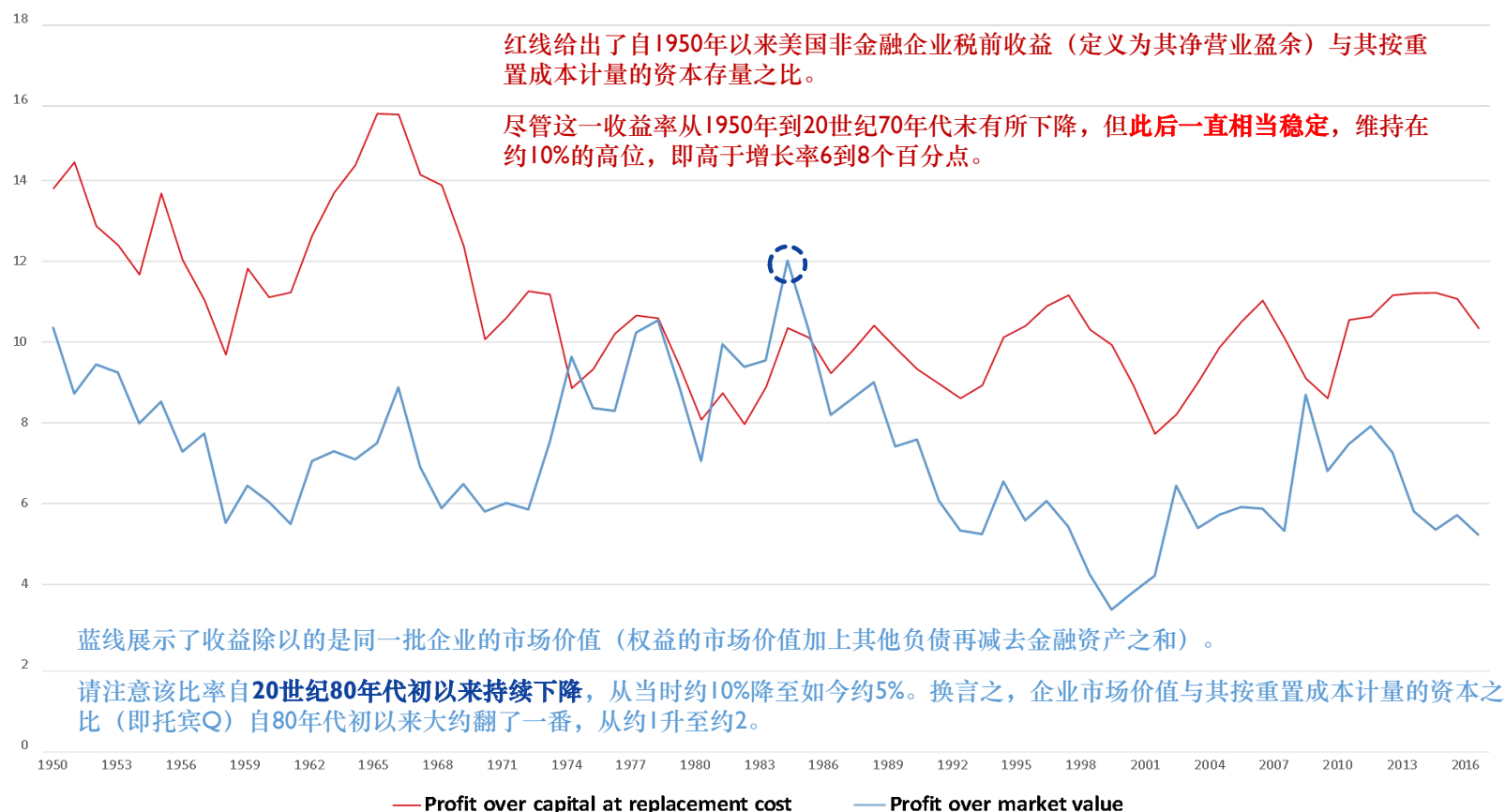


图15：1950年以来收益/重置成本资本、收益/市场价值的分化

Figure 15: Earnings over replacement cost, Earnings over market value since 1950

- 前两部分的论证表明，代际转移（债务增加或债务展期）的福利效应，既取决于平均安全利率相对于增长率有多低，也取决于资本平均边际产量相对于增长率有多高。在安全利率给定的情况下，资本平均边际产量越高，转移支付的不利影响越大。
- 解释这两个指标的分化演变有两种方式，两种方式均涉及资本平均边际产量，进而影响债务的福利效应。这是我们关心这两个指标分化演变的原因。

解释这一分化演变的两种方式

未计量的资本（尤其是无形资本）

- 如果真实资本存量大于计量的资本存量，这就意味着计量的收益率高估了真实收益率，进而高估了资本边际产量。
- 已有多位研究者检验了这一假说。他们认为：即便 Bureau of Economic Analysis 已经做出的调整尚不充分，要使两条序列的演变趋于一致，无形资本的规模将需要大到不合理的程度。
- 计量的无形资本占总资本的份额已从1980年的6%上升到如今的15%。假设其实际已上升至25%，这仅会导致计量资本增加10%，远不足以解释两条序列的分化演变。

租金不断增长

- 租金不断增长尤其反映了规模报酬递增与集中度上升的重要影响。
- 收益率不仅反映了资本的边际产量，还包含了租金。由此，企业的市场价值不仅反映了资本的价值，还包含了租金的现值。
- 若我们将企业市场价值与重置成本之比的全部增幅都归因于租金的增长，那么该比率的翻倍意味着租金占到了收益的约一半。
- 作者认为，已有证据基本一致表明资本平均边际产量有所下降，进而意味着债务的福利成本更小。

第六部分：更广阔的视角：论点与反驳

VI.A broader view.Arguments and counterarguments



本部分是非正式的、启发性的

- 数学模型考察了充分就业经济中债务用于为代际转移融资时的效应，聚焦于基本作用机制
- 模型之外，还有其他视角对债务融资的潜在收益、债务的其他潜在成本进行考察
- 作者利用这些考察对前文形成的结论进行了审视或反驳
- 潜在收益方面，模型对稳态效用的关注忽略了向稳态过渡的过程
 - 特别是忽略了初始转移（在代际转移情形中）或初始债务融资支出（在恒定债务情形中）对初始一代人的影响
 - 稳态福利的负效应可能被初始一代效用增加所完全抵消，“今朝有酒今朝醉”（似曾相识的剧本）
- 放松模型假设后，可以看到赤字融资的另一种潜在收益是其可能在经济衰退时期扩大需求、缩小产出缺口
 - 放松充分就业、债务仅用于转移支付等假设，引入经济衰退与产出缺口、债务用于刺激需求与公共投资
- 作者亦针对前述“债务可能只有较低的财政或福利成本”结论提出3个反驳论点

金融危机与初期财政扩张和随后转向财政紧缩的潜在收益相关研究在4个前沿方向上取得了进展



- 第一，重新审视了财政乘数的大小。乘数可能更大。
 - 更大的乘数意味着目标产出增加给定时，债务增加幅度更小。
 - 有两个论点认为2008年金融危机时的乘数更大：其一，家庭和企业借贷能力下降意味着当期收入对支出的影响更强，因而乘数更大；其二，在有效下限处，名义利率降无可降，央行没有动机加息来对冲财政扩张带来的通胀。
- 第二，DeLong和Summers（2012）证明，即便衰退仅留下很小的永久疤痕，财政扩张也可能在长期内实际上减少而非增加债务。与作者“债务增加可能只有很小的财政成本和福利成本”的论证互补。
 - 乘数越大、安全利率越低，这一效应越强。
- 第三，公共投资一直过低，常常是财政紧缩的主要受害者，而公共资本的边际产量很高。
 - 应当比较的是公共投资经风险调整后的社会回报率与私人资本经风险调整后的回报率，即安全利率。
- 第四，如果我们确实已进入一个长期的“长期停滞”时期，那么需要大幅为负的安全利率才能使需求等于潜在产出。
 - 在货币政策受制于有效下限的情形下，可能需要持续性的预算赤字来实现足够的需求和产出增长。



“债务可能只有较低的财政或福利成本”的3个反驳论点

- 第一，安全利率可能是被人为压低的，因此上述福利含义并不成立。
 - 美国政府债券不仅受益于低风险，还受益于流动性折价，后者使得安全利率低于其本该处于的水平。
 - 然而，问题在于这一流动性折价反映的是技术条件和偏好，还是金融体系中的扭曲。
- 如果折价反映了家庭、企业的技术条件和偏好，那么前述模型的逻辑仍然适用。
 - 此时安全利率是资本边际产品经流动性调整和风险调整后的等价物，因而正是应当与增长率进行比较的利率。
- 但如果折价反映了扭曲，那么安全利率就不再是与增长率进行比较的恰当利率。
 - 在这种情况下，减少金融抑制即使会导致安全利率上升和公共债务成本提高，也可能改善福利。资源配置效率改善带来的收益可能超过债务成本上升的损失。
 - 今日美国并无直接的金融抑制，但金融机构的内部代理问题以及金融监管可能产生某些类似效果。



“债务可能只有较低的财政或福利成本”的3个反驳论点（续）

- 第二，未来可能与过去不同，尽管有漫长的历史记录，安全利率仍可能持续高于增长率。
 - 压低利率的某些因素可能随时间消退，也可能因为公共债务上升至使均衡安全利率事实上超过增长率的水平。
 - 在前述模型中，足够高的债务水平及与之相伴的资本积累下降，最终会导致安全利率上升至增长率之上，从而产生正的财政成本和更高的福利成本。
 - 但我们可以从通胀指数化债券看到，政府如果有意通过其融资，完全可以锁定很低的实际利率；市场也认为利率大幅上升是小概率事件。
 - 不能排除安全利率可能超过增长率、债务在未来成本更高的可能性。但就算安全利率略微高于增长率，更低的资本积累可能也并不会产生重大的不利福利效应。
- 第三，多重均衡的存在性。
 - 假设前述模型正确，投资者认为债务是安全的并愿意以安全利率持有债务；此时，债务的财政成本可能确实为零，福利成本可能很小。然而，如果投资者认为债务具有风险，并要求风险溢价以补偿该风险，那么债务偿付将会更大，债务确实会变得有风险，投资者的预期便可能自我实现。

多重均衡与其对债务水平的含义

- 考虑自我实现的预期，在很大的债务区间内可能存在多种均衡：好的均衡中利率较低，坏的均衡则以公共债务上的高风险溢价和更高的利率为特征。
- 是否存在某个足够低的债务水平能够消除多重性？
 - 忽略策略性违约，必然存在一个足够低的债务水平使得债务事实上是安全的，从而仅有一种均衡。
 - 假设投资者担忧风险并提高了所要求的利率。随着所要求的利率上升，国家确实可能违约。但即便发生违约，债务规模也足够低，以至于虽然政府无法支付所要求的利率，却能够支付安全利率。这反过来意味着，投资者若为理性的，就不应也不会担忧风险。
- 然而，很难评估这一安全的债务水平究竟是多少。其次，安全的债务水平可能非常低，从目前美国、欧盟等经济体的债务水平出发，可能很难达到。
 - 作者提出：与其在无法被更宽松货币政策完全抵消的情况下实施紧缩财政，不如依靠一项激进的、随机应变的财政规则来消除坏的均衡。



復旦大學
FUDAN UNIVERSITY

请大家批评指正！

2026年6月15日