

公共债务与低利率 附录

（基于作者提供的附录完善）

1. 附录 A：增长率与利率的构建

1.1 数据来源

实际 GDP：

直接来源为 Measuringworth.com。原始来源为：1800 年至 1929 年：该序列与路易斯·约翰斯顿和塞缪尔·H·威廉姆森构建的 1790 年至 1929 年数据相链接。

（更多信息见：<https://www.measuringworth.com/datasets/usgdp/sourcegdp.php>）。1929 年至今：美国经济分析局。所使用的 .dta 文件中的实际 GDP 数据与当前可从 Measuringworth.com 下载的数据不同，因为价格指数已更改。差异很小（本文所用序列以 2009 年=100，而网站当前序列以 2012 年=100）。

1 年期国库券利率：

联邦储备委员会：1 年期国库券二级市场利率，按贴现率报价。来源：1950 年至 1952 年：9-12 个月期利率，来自《总统经济报告》。1952 年至今：1 年期国库券二级市场利率，按贴现率报价。来自 FRED 数据库。

10 年期债券利率：

联邦储备委员会：10 年期固定期限美国国债市场收益率，按投资收益率报价。来源：Measuringworth.com [FRED 网站上的序列始于 1962 年。两个序列不完全相同，但非常接近。1962-2017 年均值：Measuringworth.com]

1.2 调整后利率的构建

私人投资者持有的债务期限：

私人投资者持有的可交易有息公共债务的平均期限和期限分布序列仅从 1974 年开始可用。（来源：1974 年至 2012 年：《总统经济报告》，2013 年，（表 B88，Excel 文件）。www.gpo.gov/fdsys/pkg/ERP-2013。2012 年至今：财政部，（表 FD5，第 26 页）www.fiscal.treasury.gov/fsreports/rpt/treasBulletin/b2017_2.pdf）

在此之前，该序列是可交易有息公共债务的平均期限和期限分布。（来源：1976 年《总统经济报告》，第 255 页，表 B.72 https://fraser.stlouisfed.org/files/docs/publications/ERP/1976/ERP_1976.pdf）

在两个序列都可用的年份（1974 年和 1975 年），两个序列的平均期限非常接近。

边际持有者支付的税率：

边际持有者的税率计算为市政债券收益率与国债收益率之间的差额。Kuenz（2014）的序列覆盖 1977 年至 1993 年，包括 1 年期和 10 年期。Bloomberg 的序列（3 个月 AAA 市政债券；BVMB3M 指数，10 年期 AAA 市政债券 BVMB10T 指数）覆盖 1994–2017 年。由于 1977 年之前没有序列，我假设 1950 年至 1976 年的值等于 1977 年的值。

纳税的投资者比例：

该序列通过从公共债务持有者中剔除外国持有者（私人和公共）、联邦退休计划和美联储持有量来构建。来源：资金流量表 L210（美联储理事会 Z1 出版物 <https://www.federalreserve.gov/releases/z1/20160609/data.htm>）

1.3 债务/GDP 比率的动态方程

变量定义为：

B_t ：第 t 期末的政府债务存量（实际值）

Y_t ：第 t 期的实际 GDP

$d_t = \frac{B_t}{Y_t}$ ：第 t 期的**债务-GDP 比率**（即图中被解释变量）

$r_{adj,t}$ ：第 t 期债务的**实际利率**（图中标注为调整后利率）

g_t ：第 t 期实际 GDP 增长率，满足 $Y_t = (1 + g_t)Y_{t-1}$

x_t ：第 t 期的**基本赤字率**（不含利息支出的财政赤字占 GDP 的比重）

政府债务的演化遵循会计恒等式：当期债务 = 上期债务本息 + 当期基本赤字

$$B_t = (1 + r_{adj,t})B_{t-1} + X_t$$

其中 X_t 为当期基本赤字的实际规模，满足 $x_t = \frac{X_t}{Y_t}$ 。

转化为债务-GDP 比率形式，将等式两边同时除以当期实际 GDP Y_t ：

$$\frac{B_t}{Y_t} = \frac{(1 + r_{adj,t})B_{t-1}}{Y_t} + \frac{X_t}{Y_t}$$

左边即为 d_t ，右边第二项即为 x_t 。

对右边第一项做变形，代入 GDP 增长关系 $Y_t = (1 + g_t)Y_{t-1}$ ：

$$\frac{(1 + r_{adj,t})B_{t-1}}{Y_t} = (1 + r_{adj,t}) \cdot \frac{B_{t-1}}{(1 + g_t)Y_{t-1}} = \frac{1 + r_{adj,t}}{1 + g_t} \cdot \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{1 + r_{adj,t}}{1 + g_t} \cdot d_{t-1}$$

将上述结果代回原式，得到标准债务动态方程：

$$\mathbf{d}_t = \frac{1 + \mathbf{r}_{adj,t}}{1 + \mathbf{g}_t} \mathbf{d}_{t-1} + \mathbf{x}_t$$

该式是宏观财政学中债务可持续性分析的核心恒等式。

1.4 关于“詹森不等式”

这个方程本身是确定性下的会计恒等式。当利率 r_t 和经济增长率 g_t 是随机变量时，不能直接用期望利率 $\mathbb{E}[r_t]$ 和期望增长率 $\mathbb{E}[g_t]$ 代入计算期望债务比率。

由于函数 $f(g) = \frac{1+r}{1+g}$ 是关于 g 的凸函数，根据詹森不等式：

$$\mathbb{E} \left[\frac{1 + r_{adj,t}}{1 + g_t} \right] > \frac{1 + \mathbb{E}[r_{adj,t}]}{1 + \mathbb{E}[g_t]}$$

这意味着经济不确定性会抬升期望的债务积累速度，直接用均值代入会系统性低估债务负担，这就是随机债务动态中的詹森不等式问题。

2. 附录 B：代际转移部分的推导

2.1 确定性情况

在确定性情况下，效用函数为：

$$U = (1 - \beta)U(C_1) + \beta U(C_2)$$

第一期和第二期的预算约束为：

$$C_1 = W - K - D; C_2 = RK + D$$

生产函数为规模报酬不变的函数：

$$Y = F(K, N)$$

劳动标准化为 1，故 $N = 1$ 。

效用最大化的一阶条件为：

$$(1 - \beta)U'(C_1) = \beta RU'(C_2)$$

转移支付 D 小幅增加对效用的影响为：

$$dU = [-(1 - \beta)U'(C_1) + \beta U'(C_2)]dD + [(1 - \beta)U'(C_1)dW + \beta KU'(C_2)dR]$$

第一项称为 dU_a ，代表转移支付的直接影响；第二项称为 dU_b ，代表转移支付通过工资和回报率变化产生的影响。

首先考虑第一项，即在给定劳动和资本价格下债务对效用的影响。利用一阶条件可得：

$$dU_a = [\beta(-RU'(C_2) + U'(C_2))]dD = \beta(1 - R)U'(C_2)dD(1)$$

其次考虑第二项，即债务通过 W 和 R 的变化对效用的影响。

由 $W = F(K, 1) - F_K(K, 1)K$ 和 $R = F_K(K, 1)$ 可得：

$$dW = (F_K(K, 1) - F_K(K, 1) - F_{KK}(K, 1)K)dK = -F_{KK}(K, 1)KdK$$

$$dR = F_{KK}(K, 1)dK \text{ 因此 } dR = -(1/K)dW$$

将 dW 代入第二项：

$$dU_b = -[(1 - \beta)U'(C_1) - \beta U'(C_2)]KdR$$

利用效用最大化的一阶条件：

$$dU_b = -[\beta(R - 1)U'(C_2)]KdR$$

或者，利用 dR 与 dK 的关系：

2.2 不确定性情况

在不确定性下，期望效用为：

$$U = (1 - \beta)U(C_{1t}) + \beta EU(C_{2t+1})$$

第一期和第二期的预算约束为：

$$C_{1t} = W_t - K_t - D; C_{2t+1} = R_{t+1}K_t + D$$

生产函数为：

$$Y_t = A_t F(K_{t-1}, N)$$

其中 $N = 1$ ，工资为 W_t ，资本回报率为 R_t ，且 A_t 是随机的。

在时间 t ，效用最大化的一阶条件为：

$$(1 - \beta)U'(C_{1t}) = \beta E[R_{t+1}U'(C_{2t+1})]$$

我们可以定义一个影子无风险利率 R_{t+1}^f ，它必须满足：

$$R_{t+1}^f EU'(C_{2t+1}) = E[R_{t+1}U'(C_{2t+1})]$$

在时间 t ， D 小幅增加对效用的影响为：

$$dU_t = dU_{at} + dU_{bt}$$

其中：

$$dU_{at} = [-(1 - \beta)U'(C_{1t}) + \beta EU'(C_{2t+1})]dD$$

$$dU_{bt} = (1 - \beta)U'(C_{1t})dW_t + \beta K_t E[U'(C_{2t+1})dR_{t+1}]$$

如前，第一项 dU_{at} 反映转移支付的直接影响，第二项 dU_{bt} 反映通过工资和回报率变化产生的影响。

考虑第一项，即在给定价格下债务对效用的影响。利用一阶条件：

$$dU_{at} = -\beta E[R_{t+1}U'(C_{2t+1})] + \beta E[U'(C_{2t+1})]dD$$

因此，利用无风险利率的定义：

$$dU_{at} = \beta(1 - R_{t+1}^f)EU'(C_{2t+1})dD(4)$$

考虑第二项，即债务通过价格对效用的影响：

$$dU_{bt} = (1 - \beta)U'(C_{1t})dW_t + \beta K_t E[U'(C_{2t+1})dR_{t+1}]$$

利用一阶条件：

$$dU_{bt} = \beta E[R_{t+1}U'(C_{2t+1})]dW_t + \beta K_t E[U'(C_{2t+1})dR_{t+1}]$$

注意：

$$W_t = A_t F(K_{t-1}, 1) - A_t F_K(K_{t-1}, 1)K_{t-1}$$

$$R_{t+1} = A_{t+1} F_K(K_t, 1)$$

$$dW_t = -K_{t-1}dR_t$$

将 dW_t 代入 dU_{bt} 的表达式：

$$dU_{bt} = -\beta K_{t-1} E[R_{t+1}U'(C_{2t+1})]dR_t + \beta K_t E[U'(C_{2t+1})dR_{t+1}]$$

利用 dR_t 与 R_t 、 dR_{t+1} 与 R_{t+1} 的关系：

$$dR_t = \frac{F_{KK}(K_{t-1}, 1)}{F_K(K_{t-1}, 1)} R_t dK_{t-1}$$

$$dR_{t+1} = \frac{F_{KK}(K_t, 1)}{F_K(K_t, 1)} R_{t+1} dK_t$$

代入得：

$$\begin{aligned} dU_{bt} = & -\beta \frac{K_{t-1} F_{KK}(K_{t-1}, 1)}{F_K(K_{t-1}, 1)} E[R_{t+1}U'(C_{2t+1})] R_t dK_{t-1} \\ & + \beta \frac{K_t F_{KK}(K_t, 1)}{F_K(K_t, 1)} E[R_{t+1}U'(C_{2t+1})] dK_t \end{aligned} \quad (5)$$

在 $K_t = K_{t-1} = K$ 且 $dK_t = dK_{t+1} = dK$ 处评估：

$$dU_{bt} = \left[-\beta \frac{K F_{KK}(K)}{F_K(K)} E[U'(C_{2t+1})R_{t+1}] (R_t - 1) \right] dK$$

利用 $K F_{KK}(K)/F_K(K) = -(1/\eta)\alpha$ ，其中 α 为劳动份额， η 为资本与劳动之间的替代弹性。利用边际产品与无风险利率的关系： $E[U'(C_{2t+1})R_{t+1}] = R_{t+1}^f E U'(C_{2t+1})$ 。将方程重写为：

$$dU_{bt} = \left[\beta \frac{1}{\eta} \alpha E[U'(C_{2t+1})R_{t+1}] \right] (R_t - 1) dK$$

因此，在评估第二项通过福利效应传递的符号时，相关利率是风险利率，即资本的边际产品。最直观的写法是：

$$dU_{bt} = \left[\beta \frac{1}{\eta} \alpha R_t \right] E \left[\left(R_{t+1} - \frac{R_{t+1}}{R_t} \right) U'(C_{2t+1}) \right] dK$$

资本提供 R_{t+1} 。隐性转移提供 R_{t+1}/R_t ，如果 $R_t > 1$ 则更小。

为了感受两种效应的相对大小，在无风险利率和风险利率的平均值处评估这两项：

$$dU/dD = \left[(1 - ER^f) - \frac{1}{\eta} \alpha ER^f (ER - 1) (-dK/dD) \right] \beta E[U'(C_2)]$$

因此：

$$\text{sign} dU \equiv \text{sign} (1 - ER^f) - [(1/\eta) \alpha ER^f (-dK/dD)] (ER - 1)$$

dK/dD 的近似值可以从积累方程推导出来。忽略不确定性，并忽略转移支付对储蓄的（较小）财富效应，使得稳态资本满足：

$$K = \beta W - D = \beta F_N(K, 1) - D$$

这意味着，对于小额转移 dD ：

$$dK = \beta F_{KN}(K, 1) - dD$$

利用替代弹性的定义和劳动份额，可以重写为：

$$dK/dD = \beta \alpha (1/\eta) R dK/dD - 1$$

或：

$$dK/dD = -\frac{1}{1 - \beta \alpha (1/\eta) ER}$$

在柯布-道格拉斯情况下（ $\eta = 1$ ），利用近似 $ER \approx (1 - \alpha)/(\alpha\beta)$ （再次忽略不确定性和詹森不等式，其影响很小），该方程简化为更简单的公式：

$$\text{sign} dU \equiv \text{sign} [(1 - ER^f) - ER^f (ER - 1)] \quad (7)$$

或

$$\text{sign} dU \equiv \text{sign} [1 - ER^f ER] \quad (8)$$

2.3 要素价格前沿关系

前提假设：规模报酬不变（一次齐次）的生产函数 $Y = F(K, L)$ ，完全竞争市场，要素按边际产出定价。

完全竞争下企业利润为 0，总产出等于要素总报酬：

$$Y = WL + RK$$

其中 W 为工资（劳动要素价格）， R 为资本租金率（资本要素价格）。

对等式两边同时取全微分：

左边由生产函数微分得：

$$dY = F_K dK + F_L dL$$

由要素边际定价规则 $F_K = R$ 、 $F_L = W$ ，代入得：

$$dY = RdK + WdL$$

右边对要素报酬总额微分得：

$$d(WL + RK) = LdW + WdL + KdR + RdK$$

联立左右两边的 dY ，消去两侧相同的 $WdL + RdK$ ，最终得到**要素价格前沿关系**：

$$L \cdot dW + K \cdot dR = 0$$

若将劳动供给标准化为 $L = 1$ ，可简化为：

$$dW + K \cdot dR = 0$$

该式的经济含义为：在技术不变、产出不变的前提下，两种要素价格的变动方向相反，且变动幅度由要素存量加权约束，构成要素价格的可行边界。

3. 附录 C：校准与模拟

3.1 函数形式

期望效用采用 Epstein-Zin-Weil 规范：

$$(1 - \beta)\ln C_{1t} + \beta \frac{1}{1 - \gamma} \ln E(C_{2t+1}^{1-\gamma})$$

替代弹性等于 1， γ 是相对风险厌恶系数。

生产函数为：

$$Y_t = A_t(bK_{t-1}^\rho + (1 - b)N^\rho)^{1/\rho} = A_t(bK_{t-1}^\rho + (1 - b))^{1/\rho}$$

其中 A_t 是白噪声，对数正态分布， $\ln A_t \sim N(\mu; \sigma^2)$ ，且 $\rho = (\eta - 1)/\eta$ ， η 为替代弹性。

当 $\eta = \infty$ 时， $\rho = 1$ ，得到线性情况。柯布-道格拉斯是 η 趋近于 1 时的极限，因此 ρ 趋近于 0。

工资和资本回报率为：

$$W_t = A_t(1 - b)\left(\frac{Y_t}{A_t N_t}\right)^{1-\rho} = A_t(1 - b)\left(\frac{Y_t}{A_t}\right)^{1-\rho} \equiv W(K_{t-1}, A_t)$$

$$R_t = A_t b \left(\frac{Y_t}{A_t K_{t-1}}\right)^{1-\rho} \equiv R(K_{t-1}, A_t)$$

$$R_{t+1} = A_{t+1} b \left(\frac{Y_{t+1}}{A_{t+1} K_t}\right)^{1-\rho} \equiv R(K_t, A_{t+1})$$

3.2 参数选择

参数的选择是为了拟合一组平均无风险利率和平均风险利率的值：

我考虑净年化平均风险利率（资本的边际产品）

减去增长率（此处为零）在 0% 到 4% 之间。这些意味着平均 25 年总风险利率 ER 的值在 1.00 到 2.66 之间。

我考虑净年化平均无风险利率减去增长率在 -2% 到 1% 之间；这些意味着平均 25 年总无风险利率 ER^f 的值在 0.60 到 1.28 之间。

以下系数是事先选定的：

- b （在柯布-道格拉斯情况下等于资本份额）等于 1/3。

- σ 等于 0.20。
- η 取两个值之一： $\eta = \infty$ 对应线性生产函数情况， $\eta = 1$ 对应柯布-道格拉斯情况。

用于拟合每一对 (ER, ER^f) 的参数一方面是 β 和 μ ，另一方面是 γ 。

- 参数 β 和 μ 决定（与 σ 一起， σ 作用较小）平均资本积累水平和平均资本边际产品——即平均风险利率。通常两个参数都起作用。

然而，在线性生产情况下，资本的边际产品独立于资本水平，因此仅取决于 μ ；因此，我选择 μ 来拟合资本边际产品的相关平均值。

在柯布-道格拉斯情况下，资本的边际产品独立于 μ ，仅取决于 β ；因此我选择 β 来拟合资本边际产品的相关平均值。

- 参数 γ 与 σ 一起决定风险利率与无风险利率之间的利差。在没有转移支付的情况下，两个利率之间满足以下关系：

$$\ln R_{t+1}^f - \ln ER_{t+1} = -\gamma\sigma^2$$

因此，两个平均利率之间的给定利差决定了 γ 。

出于文中解释的原因，我还假设年轻人在没有转移支付或债务的情况下，会收到一个非随机的禀赋 X 。对于每一对 (ER, ER^f) ，我选择 X 等于该对对应的平均稳态工资。

3.3 无代际转移或债务时的运动方程

对于 $D = 0$ ，动态方程为：

$$K_t = \beta(X + W(K_{t-1}, A_t))$$

$$C_{1t} = (1 - \beta)(X + W(K_{t-1}, A_t))$$

$$C_{2t+1} = \beta(X + W(K_{t-1}, A_t))R(K_t, A_{t+1})$$

其中函数 $W(\cdot)$ 和 $R(\cdot)$ 如上给出。

无风险利率与风险利率的关系为：

$$\ln R_{t+1}^f = \ln ER_{t+1} - \gamma\sigma^2$$

这些方程用于求解基础参数 β, μ, γ 。

3.4 存在代际转移 D 时的运动方程

资本积累的动态由效用最大化的一阶条件隐含给出：

$$(1 - \beta)(1/C_{1t}) = \beta \frac{E[C_{2t+1}^{-\gamma} R_{t+1}]}{E[C_{2t+1}^{1-\gamma}]}$$

或等价地：

$$\frac{1 - \beta}{(X + W_t - K_t - D)} = \beta \frac{E[(R_{t+1}(R_{t+1}K_t + D))^{-\gamma}]}{E[(R_{t+1}K_t + D)^{1-\gamma}]} \quad (9)$$

这导致一个函数（对于 $D > 0$ ，必须数值求解）的形式为：

$$K_t = K(W_t, D)$$

该函数使用三阶多项式近似，因此资本动态由下式给出：

$$K_t = K(W(K_{t-1}, A_t), D)$$

消费依次由下式给出：

$$C_{1t} = X + W(K_{t-1}, A_t) - K_t - D$$

$C_{2t+1} = K_t R(K_t, A_{t+1}) + D$ 这些方程用于求解在每一对 (ER, ER^f) 下，有无代际转移时稳态福利的变化。我通过生成 2000 个 A 的实现序列并计算相关平均值来完成。结果报告在图 7 至图 10 中。

3.5 效用最大化的一阶条件（Euler 方程）：

$$(1 - \beta)(1/C_{1t}) = \beta \frac{E[C_{2t+1}^{-\gamma} R_{t+1}]}{E[C_{2t+1}^{1-\gamma}]}$$

推导过程：

给定效用函数：

$$U_t = (1 - \beta) \ln C_{1,t} + \frac{\beta}{1 - \gamma} \ln E_t[C_{2,t+1}^{1-\gamma}]$$

预算约束为：（存在代际转移支付 D ）

$$C_{1,t} = W_t + X - K_t - D$$

$$C_{2,t+1} = R_{t+1}K_t + D$$

其中 R_{t+1} 是 $t+1$ 期的资本边际回报率，由技术冲击 A_{t+1} 决定，在 t 期是未知的随机变量。

消费者的问题为：

在预算约束下，选择储蓄量 K_t ，最大化一生期望效用

我们通过对选择变量 K_t 求导，令导数为0来推导：

第一项：

$$\left. \frac{\partial U_t}{\partial K_t} \right|_{\text{第一期}} = (1 - \beta) \cdot \frac{1}{C_{1,t}} \cdot \frac{dC_{1,t}}{dK_t} = -\frac{1 - \beta}{C_{1,t}}$$

第二项是期望效用的对数形式，需要用链式法则逐层求导：令 $V_t = E_t[C_{2,t+1}^{1-\gamma}]$ ，则第二期效用可写为 $\frac{\beta}{1-\gamma} \ln V_t$ 。

先对 $\ln V_t$ 求导：

$$\frac{d}{dK_t}(\ln V_t) = \frac{1}{V_t} \cdot \frac{dV_t}{dK_t}$$

再对期望项 V_t 求导（期望与求导可交换顺序）：

$$\frac{dV_t}{dK_t} = E_t \left[\frac{d}{dK_t} C_{2,t+1}^{1-\gamma} \right] = E_t \left[(1 - \gamma) C_{2,t+1}^{-\gamma} \cdot \frac{dC_{2,t+1}}{dK_t} \right]$$

年老时消费对储蓄的导数： $\frac{dC_{2,t+1}}{dK_t} = R_{t+1}$ ，代入得：

$$\frac{dV_t}{dK_t} = (1 - \gamma) \cdot E_t [R_{t+1} \cdot C_{2,t+1}^{-\gamma}]$$

把以上结果代回第二期效用的导数：

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_t}{\partial K_t} \right|_{\text{第二期}} &= \frac{\beta}{1 - \gamma} \cdot \frac{1}{V_t} \cdot (1 - \gamma) \cdot E_t [R_{t+1} C_{2,t+1}^{-\gamma}] \\ &= \beta \cdot \frac{E_t [R_{t+1} \cdot C_{2,t+1}^{-\gamma}]}{E_t [C_{2,t+1}^{1-\gamma}]} \end{aligned}$$

效用最大化时，储蓄的净边际效用变化为0：

$$-\frac{1 - \beta}{C_{1,t}} + \beta \cdot \frac{E_t [R_{t+1} \cdot C_{2,t+1}^{-\gamma}]}{E_t [C_{2,t+1}^{1-\gamma}]} = 0$$

整理后得到欧拉方程的一般形式：

$$\frac{1 - \beta}{C_{1,t}} = \beta \cdot \frac{E_t [R_{t+1} \cdot C_{2,t+1}^{-\gamma}]}{E_t [C_{2,t+1}^{1-\gamma}]}$$

3.6 债务展期时的运动方程

资本运动方程为：

$$K_t = \beta(X + W(K_t - 1, A_t))$$

相应的消费值为：

$$C_{1,t} = W_t + X - (K_t + D_t)$$

$$C_{2,t+1} = R_t + 1K_t + D_t R_{t+1}^f$$

债务遵循：

$$D_t = R_t^f D_{t-1}$$

储蓄在资本和债务之间分配：

$$S_t = K_t + D_t$$

无风险利率由一阶条件定义：

$$R_{t+1}^f E[C_{2,t+1}^{-\gamma}] = E[R_{t+1}(C_{2,t+1})^{-\gamma}]$$

或等价地：

$$R_{t+1}^f = \frac{E_t[R_{t+1} \cdot C_{2,t+1}^{-\gamma}]}{E_t[C_{2,t+1}^{-\gamma}]}$$
$$R_{t+1}^f = \frac{E_t \left[R_{t+1} (R_{t+1}(S_t - D_t) + R_{t+1}^f D_t)^{-\gamma} \right]}{E_t \left[(R_{t+1}(S_t - D_t) + R_{t+1}^f D_t)^{-\gamma} \right]} \quad (11)$$

定义 $Q_t = \frac{D_t}{S_t}$ ，并将上述方程重写为：

$$R_{t+1}^f = \frac{E_t \left[R_{t+1} (R_{t+1} + (R_{t+1}^f - R_{t+1})Q_t)^{-\gamma} \right]}{E_t \left[(R_{t+1} + (R_{t+1}^f - R_{t+1})Q_t)^{-\gamma} \right]} \quad (12)$$

这隐含地将 R_{t+1}^f 定义为 K_t 和 Q_t 的函数。我通过三阶多项式近似此函数。

然后，我使用这些方程推导债务-储蓄比率和效用的动态，通过生成 1000 次模拟，每次模拟基于 5 次（150 年） A 的抽取。在每次模拟中，我从没有债务时的平均稳

态资本值开始，并在时间 0 引入债务。

为了判断特定的债务展期是否失败，我使用一个（任意的）阈值：无风险利率每年超过 1% 的条件。其动机是，如果发生这种情况，除非经济经历一系列异常好的冲击使无风险利率恢复到负数（概率极低），否则债务动态很可能导致债务-储蓄比率从此稳步上升。如果超过阈值，我（再次任意地）假设通过对年轻人征税来全额偿还债务。

这些模拟结果报告在图 11 至图 14 中。

4. 附录 D：利润率与边际产品

4.1 数据来源

利润。

计算收益与重置成本之比时：表 1.14，第 24 行，自 1929 年起，BEA 数据网站（公司利润、净利息和转移支付之和）国内公司商业的增加值（现值）以及国内非金融公司商业的增加值（现值和链式美元）[十亿美元]，季节性调整年率。

计算收益与市场价值之比时：资金流量表。<https://www.federalreserve.gov/releases/z1/20091210/data.htm> 净营业盈余减去税收。表 F102，第 1 行减去第 2 行。

按重置成本计算的资本。

表 6-1，第 2 行，自 1925 年起，BEA 数据网站。按行业组和组织法律形式划分的私人固定资产的现价净存量。[十亿美元；年末估计值]

资本的市场价值

资金流量表 <https://www.federalreserve.gov/releases/z1/20091210/data.htm> 表 B102。非金融资本的市场价值，定义为已发行股票的市场价值（第 35 行）加上负债（第 21 行）减去金融资产（第 6 行）